

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224619

UNIVERSAL
LIBRARY

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

نصاب فی بیاضی

حصہ اول

برائے طبیعیات بی۔ ایس سی

تالیف

مولوی محمد عبدالرحمن خان صاحب بی۔ ایس سی آنرز (لندن)

اسٹوڈنٹ آف میڈیسیں کالج آف سائنس (لندن) فیلو آف میڈیسیں اسٹوڈنٹ کالج آف سائنس (لندن)

سابق صدر کلیدیہ جامعہ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۵۵ھ ۱۳۴۵ھ ۱۹۳۶ء

طبع و نشر
چھاپہ خانہ امیر علی شاہ

دیسباچہ

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی کی تیاری میں زیادہ تر اس امر کی کوشش کی گئی ہے کہ جن طلبہ کا اصل مضمون طبیعیات ہو اور جو اعلیٰ ریاضی پر زیادہ وقت نہ صرف کر سکتے ہوں اُن کے لیے ایسا جامع لیکن مختصر کتاب لکھی جائے جس کے مطالعہ سے انہیں ریاضی کے ضروری مضامین اور مفید طریقوں سے کافی واقفیت حاصل ہو سکے اور آگے چل کر شوق پیدا ہو کہ اساتذہ فن کی مستند کتابوں کا تفصیلی مطالعہ کیا جائے۔

اس کے لکھنے میں مؤلف کو بڑی احتیاط برتنی پڑی۔ ایک طرف نصاب پورا کرنا تھا تو دوسری طرف کتاب کا حجم بھی گھٹانا تھا۔ مسائل کی تفہیم کے ساتھ چیدہ چیدہ مشقی سوالات کا شامل کرنا بھی ضروری تھا نہ اس قدر زیادہ کہ طالب علم گھبرا جائے اور نہ اتنے کم کہ مشق کافی نہ ہو۔

انگریزی فرانسیسی اور جرمن زبانوں میں بھی اس طرز کی کتابیں بہت کم ہیں۔ اور جو ہیں ان پر کسی نہ کسی پہلو سے اعتراض ہوا ہے۔ جیسے جیسے کام کی اہمیت معلوم ہو رہی ہے اعتراض کم ہوتے آ رہے ہیں۔ کسی خاص کتاب کا اگر ترجمہ کیا جاتا تو نہ نصاب ہی پورا ہوتا اور نہ حجم کم رہ سکتا۔

اس لیے مختلف برقی کتابوں سے مدد لینے کی ضرورت محسوس ہوئی جسے اول
کی تالیف میں جن کتابوں سے خاص طور پر استفادہ کیا گیا اُن کے نام
درج ذیل ہیں :-

1. F. G. W. BROWN'S Higher Mathematics.
2. F. S. WOODS AND F. H. BAILEY'S A Course in Mathematics,
2 Volumes.
3. HALL AND KNIGHT'S Higher Algebra.
4. C. SMITH'S Co-ordinate Geometry.
5. W. P. MILNE'S Higher Algebra.
6. D. HUMPHREY'S Advanced Mathematics.
7. LONEY'S Plane Trigonometry, Part II.
8. H. S. CARSLAW'S Plane Trigonometry.

محمد عبد الرحمن خاں

فہرستِ مضمین

نصابِ فیلی ریاضی - برائے طبیعیات بی۔ ایس سی جامعہ عثمانیہ
حصہ اول

صفحہ نمبر	مضمون	صفحہ نمبر
۱	پہلا باب مسئلہ ثنائی	۱
۲۸	دوسرا باب جزوی کسور	۲
۴۲	تیسرا باب مقطعات	۳
۶۶	چوتھا باب مسئلہ اقوت نما - لوکارتم اور لوکارتمی سلسلہ	۴
۸۳	پانچواں باب ڈی موآڈم کا مسئلہ اور اس کے استعمال	۵
۱۱۰	چھٹا باب قائم اور قطبی متحدہ - اُن کا احتمالہ اور خطِ مستقیم کی مساواتیں	۶
۱۴۲	ساتواں باب دائرہ کی مساواتیں	۷
۱۷۰	آٹھواں باب خطِ مکانی کی مساواتیں	۸
۱۸۷	نواں باب خطِ ناقص کی مساواتیں	۹
۲۱۶	دسواں باب خطِ زائد کی مساواتیں	۱۰
۲۳۲	گیارہواں باب ماسک کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات	۱۱
۲۴۲	بارہواں باب درجہ دوم کی عام مساوات	۱۲
۲۵۸	تیرہواں باب کعبی اور عددی سروں کی مساواتوں کا عملی حل	۱۳
۲۷۳	چودھواں باب مثلثی سلسلوں کے چار جمع، جب لا اور جم لا کے سلسلے اور زائدی تفاہیل	۱۴

بسم اللہ الرحمن الرحیم

نصاب ریاضی

برائے

طبیعیات۔ بی۔ اے

پہلا باب

مسئلہ ثنائی

BINOMIAL THEOREM

۱۔ مسئلہ ثنائی سے مراد ایک ضابطہ ہے جس کے ذریعہ کوئی دو رقمی جملہ جو $(a + b)^n$ کی شکل کا ہو کسی بھی قوت تک بلند کیا جاسکتا ہے یعنی $(a + b)^n$ کا پھیلاؤ ہے جس میں n کوئی ایک قوت نہا ہے۔

پہلے ہم فرض کریں گے کہ n ایک مثبت اور صحیح عدد ہے۔

$(a + b)^n$ واضح ہے کہ n اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں ہر ایک $(a + b)$ کے مساوی ہے اور اس پھیلاؤ میں ہر ایک رقم n ابعاد کی ہے اس لئے کہ وہ n حروف کو n اجزائے ضربی میں سے ایک ایک حرف کو لے کر آپس میں ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے چنانچہ ہر وہ رقم جس میں a یا b شریک ہے اس طرح بنتی ہے کہ کسی بھی n اجزائے ضربی میں سے a کو لیتے ہیں اور بقیہ $n - 1$ اجزائے ضربی میں سے b کو لیتے ہیں اس لئے کہ a والی رقموں کی تعداد n اشیاء میں سے r اشیاء کے طریقہ

انتخاب کی تعداد کے مساوی ہونی چاہیے۔ یعنی $\frac{1}{n} \times 1$ کا سر سچ رہے۔ پس رکو
 علی الترتیب ۱، ۲، ۳، ن قیمتیں دینے سے جملہ کی تمام رقموں کے
 سر حاصل ہو جاتے ہیں۔ لہذا
 $(1+n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
 کیونکہ سچ اور سچ دونوں کی قیمت ۱ کے مساوی ہے۔

۴۔ مسئلہ ثانی کی سادہ ترین شکل $(1+n)$ کا پھیلاؤ ہے۔ یہ شکل پہلی
 فصل کے عام ضابطہ میں لا کے بجائے ۱ اور ۱ کے بجائے لا لکھنے سے حاصل
 ہوتی ہے۔ لہذا

$$(1+n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ہے جس میں $\frac{n(n+1)}{2}$ عام رقم ہے۔

کسی بھی دو رقمی جملہ کی قوت کو بلند کر کے پھیلا نا مقصود ہو تو اس کا آسان
 ترین طریقہ یہ ہوگا کہ اس دو رقمی جملہ کو ایسی شکل میں بدل دیا جائے جس کی
 پہلی رقم اکائی ہو اور اس کے بعد مصرعہ بالا طریقہ سے اسے پھیلا دیا
 جائے۔ مثلاً

$$(1+n) = \left\{ \left(\frac{1}{10} + 1 \right) \right\} = \left(\frac{1}{10} + 1 \right)$$

بظہر سہولت $\frac{1}{10}$ کے عوض ہی لکھ کر مسئلہ ثانی استعمال کیا جاسکتا ہے۔

۳۔ طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ $(1+n)$ کے پھیلاؤ میں جملہ $1+n$
 رقمیں ہوتی ہیں۔ $(1+n)$ میں رقم جو کہ عام رقم کہلاتی ہے

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

اور لا اور ۱ کو ان کے مناسب قوت نما دینے سے کوئی بھی معینہ رقم معلوم

تو اعظم سرسج n ہے اور جب n ایک طاق عدد ہوتا ہے تو تسبیح $\frac{n+1}{2}$ اور تسبیح $\frac{n+1}{2}$ اعظم اور مساوی ہوتے ہیں۔

۴۔ جملہ $(n+1)$ کے پھیلاؤ میں اعظم رقم کی تعیین۔
چونکہ $(n+1) = (n+1) \times \frac{n}{n}$ اور $(n+1)$ جملہ $(n+1) \times \frac{n}{n}$ کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم کو ضرب دیتا ہے اس لئے کافی ہوگا کہ آخر الذکر جملہ کے پھیلاؤ میں سب اسے بڑی رقم دریافت کی جائے۔

فرض کرو کہ (r) ویں اور $(r+1)$ ویں رقمیں کوئی سی دو متواتر رقمیں ہیں۔ مسئلہ ثانی سے ظاہر ہے کہ آخر الذکر اول الذکر کو $(\frac{n}{r+1} \times \frac{r}{r+1})$ سے ضرب دینے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $(\frac{n}{r+1} - \frac{1}{r+1})$ سے ضرب دینے سے۔
جزو ضربی $\frac{n}{r+1} - \frac{1}{r+1}$ اگھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے بڑھتا جاتا ہے۔

پس $(r+1)$ ویں رقم r ویں رقم سے ہمیشہ بڑی نہیں ہوتی بلکہ صرف اس وقت تک بڑی ہوتی ہے جس وقت تک کہ $(\frac{n}{r+1} - \frac{1}{r+1})$ کی قیمت ۱ کے مساوی یا اس سے کم ہوتی ہے۔

$$\text{اب } (\frac{n}{r+1} - \frac{1}{r+1}) < 1 \text{ اتنا حالیکہ } \frac{n}{r+1} - 1 < \frac{1}{r}$$

$$\text{یعنی } \frac{n}{r+1} < 1 + \frac{1}{r} \text{ یا } \frac{n}{r+1} < \frac{r+1}{r}$$

اگر $\frac{n}{r+1}$ ایک صحیح عدد ہے تو اس کو p سے تعبیر کرو۔ تب اگر $r = p$ تو ضرب دینے والا جزو ۱ ہو جاتا ہے اور $(p+1)$ ویں رقم p ویں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور پھر دو رقمیں بقیہ سب رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر $\frac{n}{r+1}$ صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو q سے تعبیر کرو تو مصرعہ بالا شرط (یعنی $\frac{n}{r+1} < \frac{r+1}{r}$) کی تکمیل کے ساتھ ساتھ r کی قیمت q ہو سکتی ہے۔ پس اعظم رقم $(q+1)$ ویں رقم ہے۔ چونکہ یہاں اعظم رقم سے مراد عددِ اعظم رقم ہے اس لئے $(n+1)$

علامت ف (م) سلسلہ ۱+م+لا + $\frac{م(۱-م)}{۲ \times ۱}$ لا + $\frac{م(۱-م)(۱-م)}{۳ \times ۲ \times ۱}$ لا +
کو تعبیر کرتی ہے۔

تب علامت ف (ن) سلسلہ

$$\dots + r_2 \frac{(r-1)(1-1)n}{3 \times 2 \times 1} + r_1 \frac{(1-1)n}{2 \times 1} + 1n + 1$$

کو تعبیر کر گئی۔

اگر ہم ان دونوں سلسلوں کو باہم دیکر ضرب دینگے تو حاصل ضرب
لاکی صعدی قزاقوں کا ایک دوسرا سلسلہ ہوگا جس کے سر شکل کے
اعتبار سے غیر متغیر ہونگے م اور ان خواہ کچھ ہی ہوں۔

اس حاصل ضرب کی یہ غیر متغیر شکل دریافت کرنے کے لئے ہم m اور n کو موزوں اور سہل ترین قیمتیں دینگے۔ فرض کرو کہ m اور n مثبت صحیح عدد ہیں۔ اس حالت میں $f(m) = (1 + \lambda)^m$ کی پھیلائی ہوئی شکل ہوگی اور $f(n) = (1 + \lambda)^n$ کی پھیلائی ہوئی شکل۔ پس $f(m) \times f(n) = (1 + \lambda)^m \times (1 + \lambda)^n = (1 + \lambda)^{m+n}$

لیکن جبکہ m اور n مثبت صحیح عدد ہوتے ہیں تو $(n+1)^m = (n+1) \times (n+1) \times \dots \times (n+1)$ (n+1) بار

$$1 + (m+n) + \dots + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + \dots + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{6} + \dots + \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)}{24} + \dots$$

پس F (م) $\times F$ (ن) حاصل ضرب کی بہر صورت پھیلائی ہوئی شکل ہے، م اور ن کی قیمتیں خواہ کچھ ہی ہوں۔ اور ہمارے سامنے طریق کتابت کے مطابق ہم اس حاصل ضرب کو F (م + ن) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے

$$f(m) \times f(n) = f(m+n)$$

سہذا $f(m) \times f(n) \times f(p) = f(m+n+p)$

$$= \text{ف (م + ن + پ)}$$

اس استدلال سے ف (م) \times ف (ن) \times ف (پ)..... کر

اجزائے ضرعیہ تک

= ف (م + ن + پ + ک رقوم تک)
 م، ن، پ مقادیر میں سے ہر ایک کو س کے مساوی نو جہاں
 ہ اور اسے مثبت صحیح اعداد ہیں

$$\therefore \left\{ \text{ف} \left(\frac{\text{س}}{\text{ک}} \right) \right\} = \text{ف} (\text{ھ})$$

مگر چونکہ ھ ایک مثبت صحیح عدد ہے ف (ھ) = (۱ + لا)
 $\therefore \left\{ \text{ف} \left(\frac{\text{س}}{\text{ک}} \right) \right\} = (۱ + لا)$

$$(۱ + لا) \left(\frac{\text{س}}{\text{ک}} \right) = \text{ف} \left(\frac{\text{س}}{\text{ک}} \right)$$

لیکن ف (س) (س) تغیر ہے سلسلہ ۱ + س لا س (س) (۱ - س) لا کی
 $\therefore (۱ + لا) \left(\frac{\text{س}}{\text{ک}} \right) = ۱ + \frac{\text{س}}{\text{ک}} لا + \frac{\text{س}}{\text{ک}} \frac{(۱ - \frac{\text{س}}{\text{ک}})}{۲ \times ۱} لا^۲ + \dots$

اس سے مسئلہ شنائی کا ثبوت ہم پہنچایا جاتا ہے جبکہ قوت ناکوئی بھی مثبت
 کسر ہوتی ہے۔

واضح ہو کہ مسئلہ شنائی کے ہر دور قی جگہ کو ہم (۱ + لا) کی صورت میں
 ڈھال سکتے ہیں پس اگر (۱ + لا) کے لئے جو بات اثبات کی جاتی ہے اس کا
 اطلاق عام ہوتا ہے۔

صورت (ب)۔ جبکہ قوت ناکوئی بھی منفی مقدار ہے۔

یہ ثابت ہو چکا ہے کہ ف (م) × ف (ن) = ف (م + ن)
 م اور ن کی تمام قیمتوں کے لئے۔ اگر م کے عوض ن لکھا جائے جس میں
 ن مثبت ہے تو

$$\text{ف} (-ن) \times \text{ف} (ن) = \text{ف} (-ن + ن) = \text{ف} (۰)$$

اس لئے کہ پھیلاؤ کے سلسلہ کی تمام رقیں سوائے پہلی رقم کے
 کا عدم ہو جاتی ہیں۔

$$\therefore \text{ف} (-ن) = \frac{۱}{\text{ف} (ن)}$$

لیکن $f(n) = (n+1)^3$ کی کسی بھی مثبت قیمت کے لئے

$$f(n) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

یا $(n+1)^3 = f(n)$ لیکن از روئے قرار داد $f(n)$ سلسلہ

$$1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1} + \dots$$

$$\dots + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \times 2 \times 1} + \dots + (n-1)^3$$

جس سے مسئلہ ثنائی کا کسی بھی منفی قوت نما کے لئے ثبوت مہیا ہو جاتا ہے پس مسئلہ ثنائی مکمل طور پر ثابت ہو جاتا ہے۔

۱۲۔ واضح ہو کہ مصرعہ بالا ثبوت میں جو ”معادل شکلوں کے استقوال“ کے اصول پر مبنی ہے سلسلوں کے استدقاق و اتساع کی بحث نہیں کی گئی۔ ہم اس پہلو پر ایک سرسری نظر ڈالنا چاہتے ہیں۔

$f(n)$ کو پھیلانے سے جو جملہ حاصل ہوتا ہے اس کی رقموں کی تعداد متناہی ہوتی ہے جب تک کہ m ایک مثبت صحیح عدد ہے لیکن دوسری تمام صورتوں میں جیسا کہ اس فصل کے آخری حصہ میں دیکھینگے اس جملہ کی رقموں کی تعداد نامتناہی ہوتی ہے۔ پس یہ معلوم ہونا چاہیے کہ $f(m) \times f(n) = f(m+n)$ لکھتے ہیں تو اس کا مفہوم کیا ہے۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ جب $m > n$ اور $f(m) \times f(n) = f(m+n)$ اور $f(m+n) = f(m) \times f(n)$ یہ تینوں سلسلے مستدق ہوتے ہیں۔ اور $f(m+n) = f(m) \times f(n)$

$\{f(m) \times f(n)\}$ کا صحیح حسابی معادل ہوتا ہے۔ لیکن جب $m < n$ تو یہ تینوں سلسلے تسع ہوتے ہیں اور ہم صرف یہی دعوئے کر سکتے ہیں کہ اگر ہم $f(m)$ اور $f(n)$ کے ذریعہ جن سلسلوں کی تعبیر کرتے ہیں ان سلسلوں کو ایک دوسرے سے ضرب دیں تو حاصل ضرب

کی پہلی ر قمیں 'ف' (م + ن) سے تعبیر ہونے والے سلسلہ کی پہلی
ر رقموں سے مطابقت رکھتی ہیں۔ ر کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو۔
استدقاق کے امتحان کے سب سے زیادہ موثر طریقوں میں
ڈالمبر (D'Alembert) کا طریقہ ہے جو سلسلہ کی متواتر رقموں کی
نسبت کے امتحان پر مبنی ہے۔ اگر a, b, c, d, \dots عن ایک
نامتناہی سلسلہ ہے تو وہ مستحق یا متنع ہوگا بلحاظ اس کے کہ $(a+b), (b+c), \dots$
عدداً اسے کم یا زیادہ ہے۔ لیکن اگر وہ ۱ ہو تو مزید امتحان کی ضرورت ہوگی۔
ظاہر ہے کہ ن جب کسری یا منفی ہوتا ہے تو $(1+n)$ کے پھیلاؤ میں عام
رقم کو پوری صراحت کے ساتھ

$$n(1-n)(1-n)^2 \dots (1-n)^{n-1}$$

لکھنا چاہیے اس لئے کہ علامت صحیح اب استعمال نہیں کی جاسکتی۔
سہذا عام رقم کا سرکشی معدوم نہیں ہو سکتا ہے جب تک کہ اس کے
شمار کنندہ کے اجزاء ضربی میں سے ایک جزو صفر نہ ہو۔ پس یہ سلسلہ روں
رقم پر اس وقت ختم ہو جائیگا جبکہ $n-1+r+1$ صفر ہوگا۔ یعنی $r=n+1$ ۔ لیکن
جبکہ ر ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ یہ مساوات صرف اسی وقت ممکن ہوگی جبکہ
ن بھی ایک مثبت اور صحیح عدد ہوگا۔ پس اس سے واضح ہے کہ مسئلہ ثنائی
کے ذریعہ پھیلاؤ رقموں کی محدود تعداد میں (یعنی $n+1$ رقموں تک) صرف
ایسی صورت میں ہوتا ہے جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے لیکن بقیہ
تمام صورتوں میں رقموں کی تعداد نامتناہی ہوتی ہے۔

سوالات ۱ (ب)

(۱) بتاؤ کہ $(1-n)$ کو جب مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلاتے ہیں تو اس کی
تمام رقمیں بالآخر ایک ہی علامت کی ہوتی ہیں دریافت کرو کہ وہ علامت

کیا ہے، لا کہاں ثبت ہے اور کہاں سے وہ شروع ہوتا ہے۔
 (۲) $(۱ + لا)$ کے پھیلاؤ میں سب سے پہلی منفی رقم کونسی ہے۔
 (۳) $(۲ + لا)$ کے پھیلاؤ میں ساتویں رقم کو اس کی سادہ ترین شکل میں لکھو۔

(۴) بسیط رفاص کے استراز کا وقت دمان و $\pi ۲ =$ [چھ ل] ہے جس میں فرض کرو و کی پیمائش ثنائیوں میں ہوتی ہے، ل کی فٹوں میں اور ج = ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ۔ اگر اس رفاص کا طول لا فٹ بڑھ جائے (جہاں لا بمقابلہ ل ایک بہت ہی قلیل مقدار ہے) تو بتاؤ کہ وقت استراز بقدر

$$\frac{\pi}{۱۲} \text{ مال ج} \text{ بڑھ جائیگا، اگر چھوٹی متادیر کے پہلے رتبہ تاک}$$

ہی جواب صحیح نکالا جائے۔
 (۵) مسئلہ ثنائی کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$۹۱۹۱۶۶۲ = \left(\frac{۹}{۵}\right)^5$$

۱۳ - اگر ہم (۱- لا) کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلائیں تو ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(۱- لا)^۲ = ۱ + لا + لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + \dots$$

لیکن ہمیں معلوم ہے کہ یہ نتیجہ صرف اُس صورت میں صحیح ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمت اسے کم ہوتی ہے۔ پس ہمیں یہ دریافت کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے کہ کیا ہم ہمیشہ مندرجہ ذیل پھیلاؤ

$$(۱+ لا)^ن = ۱ + لا + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} لا^۲ + \dots$$

کو صادق مان سکتے ہیں، اور اگر نہیں تو کن شرائط کے تحت یہ پھیلاؤ صحیح تصور ہو سکتا ہے۔

مثلاً فرض کرو کہ $۱ - =$

$$\text{تب } (1 - \lambda)^{-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

اگر اس مساوات میں ہم $\lambda = 2$ لکھیں تو

$$(1 - 2)^{-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots$$

لیکن یہ نتیجہ صریحاً غلط ہے۔ پس اس سے صاف ظاہر ہوتا ہے کہ ہم

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots + \lambda^n \frac{(1 - \lambda)(1 - \lambda^2) \dots (1 - \lambda^n)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} + \dots$$

کو ہر صورت میں $(1 + \lambda)^{-1}$ کا صحیح حسابی معادل نہیں تصور کر سکتے ہیں۔

$1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$ چونکہ ایک ہندسی سلسلہ ہے۔ اس سلسلہ

$$\text{کی پہلی } r \text{ رقموں کا حاصل جمع} = \frac{1 - \lambda^{r+1}}{1 - \lambda}$$

$$= \frac{1}{1 - \lambda} - \frac{\lambda^{r+1}}{1 - \lambda}$$

اور جب λ عدد 1 سے چھوٹا ہوتا ہے تو r کو کافی بڑا لینے سے ہم $\frac{1}{1 - \lambda}$ کو جس قدر چھوٹا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ یعنی اسی سلسلہ کی اگر کافی رقمیں لی جائیں تو ان کے حاصل جمع کو $\frac{1}{1 - \lambda}$ سے جس قدر کم مختلف کہ ہم بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ لیکن جب λ عدد 1 سے بڑا ہوتا ہے تو $\frac{1}{1 - \lambda}$ کی قیمت r کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے اور اس لئے سلسلہ مصرعہ بالا کی خواہ کتنی بھی رقمیں لی جائیں اس کے حاصل جمع کی قیمت $\frac{1}{1 - \lambda}$ کے تقریباً مساوی نہیں ہو سکتی ہے۔

بذریعہ مسئلہ ثنائی جب $(1 + \lambda)^{-1}$ لا کی صعودی قوتوں میں پھیلا یا جاتا ہے تو اس کا سلسلہ مستقر اور اس لئے حساباً قابل فہم ہوتا ہے صرف اس صورت میں جبکہ لا کی قیمت اسے کم ہوتی ہے اگر ہم ڈالیں $\lambda = 1$ متواتر رقموں کی نسبت کے امتحان کا طریقہ استعمال کریں تو معلوم ہوگا کہ چونکہ $(1 + r)$ دیں رقم (جس کو ہم r لکھیں گے) اور (r) ویں رقم (جس کو r لکھیں گے)

$$\text{میں نسبت} = \frac{1 + r}{r} = \frac{1 + (1 - \lambda)(1 - \lambda^2) \dots (1 - \lambda^n)}{(1 - \lambda)}$$

$$\frac{(n-1)r}{r} = \frac{(n-1)r}{r} =$$

$$(n-1)r =$$

$$\text{اس لئے } \frac{nr}{r} = \frac{(n-1)r}{r} \Rightarrow n = n-1$$

کیونکہ n ایک محدود عدد مانا گیا ہے اور r نامتناہی بڑا ہو سکتا ہے۔
یہ نسبت عدد a سے چھوٹی ہوتی ہے جبکہ a سے کم ہوتا ہے۔ میں جب
($a+1$) کے پھیلاؤ کا سلسلہ مستحق ہوتا ہے جبکہ a عدد a سے چھوٹا
ہوتا ہے۔

لیکن اگر a کی قیمت a سے بڑی ہو تو چونکہ اس سلسلہ کی عام رقم
میں a شامل ہے اس لئے r کو کافی بڑا لینے سے a کو ہم کسی بھی
معین محدود مقدار سے زیادہ بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس سلسلہ مذکور کی قیمت
غیر محدود ہوتی ہے۔ لہذا ($a+1$) کو a کی صعودی طاقتوں میں ایک
نامتناہی سلسلہ کی شکل میں پھیلانے کا حسابی مفہوم کچھ نہیں جبکہ a کی
قیمت a سے بڑی ہوتی ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کے قابل ہے کہ ہم ($a+1$) کو مسئلہ ثنائی کے
ذریعہ ہمیشہ پھیلا سکتے ہیں اس لئے کہ اگر a سے a بڑا ہو تو ($a+1$)
کو a ($a+1$) لکھ کر اور اگر a سے a بڑا ہو تو a ($a+1$)
لکھ کر پھیلا سکتے ہیں۔

۱۴۔ ($a-1$) کے پھیلاؤ میں عام رقم کی سادہ ترین شکل -

$$\text{ واضح ہے کہ اس کی } (a+1) \text{ ویں رقم } = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-a)}{r} = (a-1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-a)}{r} = (a-1)$$

$$= \frac{(1-n)(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{1}$$

$$= \frac{n(1+n)(2+n) \dots (n-1+n)}{1}$$

جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ $(1-n)$ کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم مثبت ہوتی ہے۔

مندرجہ ذیل پھیلاؤ قابل یادداشت ہیں: —

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = (1-1)$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + (1+n) + 1 = (1-1)$$

$$1 + 3 + 6 + 10 + \dots + \frac{(1+n)(2+n)}{2 \times 1} + 1 = (1-1)$$

۱۵۔ تقریبی پھیلاؤ — عملی حساب میں مندرجہ ذیل تقریبی ضابطے عموماً کافی ہوتے ہیں جبکہ لا اور ما بمقابلہ اکائی بہت ہی چھوٹے ہوتے ہیں: —

$$(1 \pm n) = 1 \pm n$$

ن مثبت ہو سکتا ہے یا منفی

$$(1 \pm 1)(1 \pm 1) = 1 \pm 1 + 1 \pm 1$$

مثال (۱) — اگر لا اس قدر چھوٹا ہے کہ اس کا مکعب اور اس سے زیادہ قوتیں نا قابل لحاظ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$[جائے لندن] \quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{(1-1) + (1+1)}{2(1+1)} = \frac{1}{2}$$

مثال کے ہر ثنائی جملہ کو علیحدہ علیحدہ لا تک پھیلائے سے

$$(1-1) = \frac{(1-1)(1-1)}{2} + (1-1) + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \dots + \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1 = \\ & (\dots + \sqrt[n]{\frac{1}{4}} - \sqrt[n]{\frac{1}{8}} + 1) \sqrt[n]{16} = \sqrt[n]{16} (\sqrt[n]{\frac{1}{4}} + 1) = \sqrt[n]{16} (\sqrt[n]{8} + 16) \\ & \dots + \sqrt[n]{\frac{27}{8}} + \sqrt[n]{\frac{3}{4}} - 1 = \sqrt[n]{8} (\sqrt[n]{27} + 1) \\ & \sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{8} \sqrt[n]{27} + \sqrt[n]{27} = \sqrt[n]{8} (\sqrt[n]{27} + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots + \sqrt[n]{\frac{1}{8}} - \sqrt[n]{\frac{1}{4}} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1 = \text{پس دی ہوئی کسر} \\ & \frac{\dots + \sqrt[n]{\frac{1}{8}} - \sqrt[n]{\frac{1}{4}} + \sqrt[n]{2} + \dots + \sqrt[n]{\frac{25}{8}} + \sqrt[n]{\frac{5}{4}} + 1}{\sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{8} \sqrt[n]{27} + \sqrt[n]{27} - 1} = \\ & \frac{\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} + 5}{\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} + 5} = \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{8} (\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} + 1) (\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$\{ \dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} \} (\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$\{ \dots + (\sqrt[n]{\frac{27}{8}} - \sqrt[n]{\frac{4}{4}}) - 1 \} (\dots + \sqrt[n]{\frac{16}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$(\dots + \sqrt[n]{\frac{27}{8}} + \sqrt[n]{\frac{4}{4}} - \sqrt[n]{\frac{16}{8}} + 5) \frac{1}{5} =$$

$$\dots + \sqrt[n]{\frac{27}{8}} + 1 = (\dots + \sqrt[n]{\frac{11}{8}} + 5) \frac{1}{5} =$$

مثال (۳)۔ ثابت کرو کہ سلسلہ

$$\dots + (\frac{27}{8} \times \frac{27}{8} \times \frac{27}{8} \times \frac{27}{8}) + \frac{27}{8} \times \frac{27}{8} \times \frac{27}{8} + (\frac{27}{8} \times \frac{27}{8}) + \frac{27}{8} + 1$$

ایک دورقی سلسلہ ہے اور اس کی قیمت دریافت کرو۔
(جامعہ لندن)
فرض کرو کہ پہلی تین رقمیں (۱+۸) کے پھیلاؤ کی رقمیں ہیں۔

$$\text{تب } n \text{ لا} = \frac{27}{8} \text{ اور } \frac{27}{8} \times \frac{27}{8} = \sqrt[n]{8} \times \frac{(1-n)}{1}$$

اگر لا اس قدر چھوٹا ہو کہ اس کا مربع اور اس سے بلند تر قوتیں ناقابلِ نظر سمجھی جاسکتی ہیں تو ذیل کے جلوں کی قیمت دریافت کرو:-

$$\frac{\frac{1}{2}(12+3) \times \left(\frac{1}{2} + 1\right)}{\frac{1}{2}(12+3)} \quad (3)$$

$$\frac{12 \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + 12 \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 12 + 12 + 1} \quad (4)$$

(5) ثابت کرو کہ

$$1 + n + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{n(n+1)}{2} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots$$

(6) $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر معلوم کرو۔
 (7) ثابت کرو کہ $\frac{1}{n} + 1$ کو اگر $\frac{1}{n}$ کے مساوی سمجھیں تو جو خطا واقع ہوگی $\frac{1}{n}$ سے کم ہوگی۔

(8) اگر لا چھوٹا ہو تو ثابت کرو کہ $\frac{\frac{1}{2}(12+1) - \frac{1}{2}(12-1)}{12+1}$ کے لئے $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$ لا ایک تقریبی جملہ ہے۔

۱۶۔ $(1+n)$ کے پھیلاؤ میں عدد سب سے بڑی رقم دریافت کرو جبکہ n کوئی سی منطق قیمت رکھتا ہو۔

چونکہ یہاں سب سے بڑی رقم کی عددی قیمت سے بحث ہے ہم لا کو سارے پھیلاؤ میں مثبت تصور کریں گے۔

صورت (۱)۔ فرض کرو کہ n ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

پھیلاؤ کی $(1+n)$ دیں رقم رہ۔ دیں رقم کو $\frac{1}{n}$ یعنی $\left(\frac{1}{n} + 1\right)$ لا کے ساتھ ضرب دینے سے حاصل ہوئی ہے۔

اور اس لئے رقمیں بڑی ہوتی جاتی ہیں تاوقتیکہ

$$\left(\frac{n+1}{n} - 1 \right) < 1 \text{ یعنی } \frac{n+1}{n} < 1 + 1 \text{ یا } \frac{n+1}{n} < 2$$

اگر $\frac{n+1}{n}$ ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تقسیم کرو۔ تب اگر $r = p$ تو ضرب دینے والا جزو ضربی ۱ ہوتا ہے اور اس لئے $(p+1)$ دیں رقم پ۔ دیں رقم کے مساوی ہوتی ہے اور یہ رقمیں کوئی ہی اور رقم سے بڑی ہوتی ہیں۔

اگر $\frac{n+1}{n}$ ایک صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تقسیم کرو تب r کی سب سے بڑی قیمت ق ہوگی اور $(q+1)$ دیں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۲)۔ فرض کرو کہ n ایک مثبت کسر ہے۔

مثلاً سابق r ۔ دیں رقم کو $\left(1 - \frac{n+1}{n} \right)$ کے ساتھ ضرب دینے سے $(1+r)$ دیں رقم حاصل ہوتی ہے۔

(۱) اگر لا اکانی سے بڑا ہو تو r کو بڑھانے سے متذکرہ بالا ضرب دینے والے جزو ضربی کو ہم۔ لا کے جس قدر قریب بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں۔ پس ایک معین رقم کے بعد ہر ایک رقم اس سے ٹھیک پیشتر کی رقم کا عدداً لاگنا ہوتی ہے۔ لہذا پھیلاؤ کی رقمیں مسلسل بڑی ہوتی جائیں گی اور سب سے بڑی کوئی رقم نہ ہو سکیگی۔

(ب) اگر لا اکانی سے کم ہو تو ہم دیکھتے ہیں کہ ضرب دینے والا جزو ضربی مثبت رہتا ہے اور گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ $r < 1 + n$ ۔ اس کے بعد سے وہ منفی ہو جاتا ہے لیکن ہمیشہ عدد r سے کم رہتا ہے۔ اس لئے پھیلاؤ میں ایک سب سے بڑی رقم ہوگی۔

ضرب دینے والا جزو ضربی ۱ سے بڑا ہوگا تا وقتیکہ $\frac{n+1}{n} < 2$ ۔

اگر $\frac{n+1}{n}$ ایک صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تقسیم کرو۔ تب صورت (۱) کی طرح $(p+1)$ ۔ دیں رقم پ۔ دیں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ

دووں رقیس دوسری سب رقموں سے بڑی ہونگی۔

اگر $\frac{(1+n)}{1}$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ اس کا صحیح حصہ ق ہے۔

تب (ق + ۱) دیں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

صورت (۳)۔ فرض کرو ن منفی ہے اور = - م اس لئے م مثبت ہے۔ تب ضرب دینے والے جزو ضربی کی عددی قیمت $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0$ یعنی $(1 + \frac{1}{1})$ لا ہے۔

(۱) اگر لا اکائی سے بڑا ہو تو صورت (۲) کی طرح ہم بتا سکتے ہیں کہ پھیلاؤ کے سلسلہ میں سب سے بڑی رقم کوئی موجود نہیں ہے۔
(ب) اگر لا اکائی سے چھوٹا ہو تو ضرب دینے والا جزو ضربی ۱ سے بڑا ہوگا تا وقتیکہ

$$(1 + \frac{1}{1}) < 1 \text{ یعنی } \frac{1}{1} < 1 - 1$$

$$یا \frac{1}{1} < \frac{1}{1} - 1$$

اگر $\frac{(1-m)}{1}$ ایک مثبت صحیح عدد ہو تو اس کو پ سے تعبیر کرو۔ تب (پ + ۱) دیں رقم پ۔ دیں رقم کے مساوی ہوگی اور یہ سلسلہ کی کسی دوسری رقم سے زیادہ بڑی ہوگی۔

اگر $\frac{(1-m)}{1}$ مثبت ہو مگر صحیح عدد نہ ہو تو اس کے صحیح حصہ کو ق سے تعبیر کرو۔ تب (ق + ۱) دیں رقم سب سے بڑی ہوگی۔

اگر $\frac{(1-m)}{1}$ منفی ہو تو م اکائی سے کم ہوگی۔ اور ضرب دینے والے جزو ضربی کو (۱ - $\frac{1}{1}$) لا کی شکل میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{پس سر} = (۱-۱) \text{ن کے پھیلاؤ میں لا کا سر}$$

$$\frac{(۱+۱) \text{ن} (۱+۱) \text{ن} (۲+۱) \text{ن} \dots (۱+۱) \text{ن}}{۱} =$$

$$\frac{(۱+۱) \text{ن}}{(۱-۱) \text{ن}} =$$

۱۸۔ کسی کثیر رتقی جملہ کے پھیلاؤ میں رقموں کی تعداد کی تعیین جبکہ قوت نما ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے۔

($۱ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$ ن) کے پھیلاؤ میں ہر ایک رقم ن ابعاد کی ہے۔ اس لئے رقموں کی تعداد دہی ہے جو ن ابعاد کے متوازن حامل ضربوں کی تعداد ہے جو ر مقدار ہے $۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$ اور ان کی قوتوں کی ہے۔ اور اس لئے سابقہ فصل کی ر سے

$$\frac{(۱+۱) \text{ن}}{(۱-۱) \text{ن}} =$$

مثال — $\frac{(۱-۱) ۲}{۳ (۱+۱)}$ کے پھیلاؤ میں لا کا سر دریافت کرو۔

جملہ = $(۱-۱) ۲ (۱+۱) ۲ (۱+۱) ۲ + ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$ پر لا + ... بالفرض۔

واضح ہے کہ پیر، پیر، پیر کو علی الترتیب ۱، ۲، ۳ کے ساتھ ضرب

دینے اور نتائج کو جمع کرنے سے لا کا سر دریافت ہوگا۔

پس مطلوب سر = پیر - ۲ پیر + ۱ پیر - ۲ پیر - ۲

$$\text{لیکن پیر} = (۱-۱) \frac{(۱+۱) (۱+۱)}{۲}$$

جس میں $ع + ب + ج = ۱۱$
 اب ہمیں چاہئے کہ آزمائش سے ب اور ج کی وہ تمام مثبت صحیح
 قیمتیں معلوم کریں جو مساوات $ب + ج = ۲$ کے لئے صادق آتی ہیں۔
 اس کے بعد $ع$ کی قیمتیں ذیل کی مساوات سے معلوم کر لی جاسکتی ہیں:-

$$\begin{array}{ccccccc} ع + ب + ج = ۱۱ & & & & & & \\ ج = ۳ & \text{لکھنے کے نہیں چل سکتا ہے} & ب = ۱ & \text{اور اس لئے} & ع = ۷ & & \\ ج = ۲ & & ب = ۳ & & ع = ۶ & & \\ ج = ۱ & & ب = ۵ & & ع = ۵ & & \\ ج = ۰ & & ب = ۷ & & ع = ۴ & & \end{array}$$

مطلوبہ نمبر، پھیلاؤ کی عام رقم کے لئے اوپر جو جملہ لکھا گیا ہے اس
 کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔
 پس مطلوبہ سر =

$$\begin{array}{c} \frac{۱۱}{۱۲۳۴۵۶۷} \text{ رُب ج} + \frac{۱۱}{۱۲۳۴۵۶۷} \text{ رُب ج} + \frac{۱۱}{۱۲۳۴۵۶۷} \text{ رُب ج} + \frac{۱۱}{۱۲۳۴۵۶۷} \text{ رُب ج} \\ = ۱۲۲۰ \text{ رُب ج} + ۲۶۲۰ \text{ رُب ج} + ۲۴۴۲ \text{ رُب ج} + ۲۳۰ \text{ رُب ج} \end{array}$$

۲۰۔ پھیلاؤ (۱ + ب + لا + ج لا + دلا +) کے پھیلاؤ میں

عام رقم کی تعیین جبکہ ن کوئی ایک منطق مقدار ہو۔

مسئلہ ثنائی سے عام رقم

$$\frac{ن(ن-۱)(ن-۲).....(ن-۱+پ+۱) \text{ رُب پ}}{(ب+لا+ج لا+دلا+.....) \text{ رُب پ}}$$

ہے جس میں پ ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

فصل (۱۶) سے (ب + لا + ج لا + دلا +) کے پھیلاؤ کی

عام رستم

پہلا رستم ب ج د ض لا ۲ + ج ۲ + ۳ + ۴ ہے۔

جس میں پہلے جہ ض مثبت صحیح اعداد ہیں جن کا حاصل جمع پ ہے۔

پس دئے ہوئے جملہ کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} \times \text{پہلا رستم}$$

جس میں پ = + ج + ض + = پ

۲۱۔ چونکہ (۱ + ب + لا + ج + لا + ض + + ن) کو ہم ذیل کی شکل میں لکھ سکتے ہیں۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

اس لئے کافی ہوگا اگر ہم صرف ایسی صورت پر غور کریں جس میں کثیر رقمی جملہ کی پہلی رقم اکائی ہے۔

چنانچہ (۱ + ب + لا + ج + لا + د + + ن) کے پھیلاؤ کی عام رقم

$$\frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} \times \text{پہلا رستم}$$

جس میں پ = + ج + ض + = پ

مثال — (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + + ن) کے پھیلاؤ میں لا کا سر در یافت کرو

اس کی عام رقم

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n}}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} \times \text{پہلا رستم}$$

ہمیں چاہیے کہ آزمائش کے ذریعہ یہ 'ج'، 'ض' کی وہ تمام مثبت صحیح قیمتیں معلوم کریں جو مساوات بہ + ۲ جہ + ۳ ض = ۳ کے لئے صادق آتی ہیں۔ تب مساوات پ = بہ + جہ + ض سے پ کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے۔ مطلوبہ سر مندرجہ بالا جملہ کی نظیری قیمتوں کا حاصل جمع ہوگا۔

یہ 'ج'، 'ض' کی تعلیمیں میں انب ہوگا کہ 'ض' کو یکے بعد دیگرے جو مثبت صحیح قیمتیں دی جائیں گی ان میں سب سے پہلی قیمت اعظم ممکن ہو۔ موجودہ مثال میں یہ قیمتیں اس طرح معین ہونگی:۔

$$\text{ض} = ۱, \text{جہ} = ۰, \text{بہ} = ۰, \text{پ} = ۱$$

$$\text{ض} = ۰, \text{جہ} = ۱, \text{بہ} = ۱, \text{پ} = ۲$$

$$\text{ض} = ۰, \text{جہ} = ۰, \text{بہ} = ۲, \text{پ} = ۳$$

ان قیمتوں کو عام رقم کے جملہ میں تولین کرنے سے مطلوبہ سر

$$= \left(\frac{۲}{۳}\right) + (۱) + (۲) + \frac{\left(\frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳}\right)}{۳} =$$

$$= ۲ + \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = \frac{۲۰}{۳}$$

نوٹ۔ طالب علم کو یہ یاد رکھنا چاہئے کہ بعض اوقات مسئلہ ثنائی کا راست

استعمال زیادہ آسان اور زود اثر ثابت ہوتا ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

مثال۔۔۔۔۔ (۱ - ۲ + ۳ لا) کے پھیلاؤ میں لا کا سر دریافت کرو۔

$$(۱ - ۲ + ۳ لا) = ۱ - \{ (۳ لا - ۲ لا) \} = ۱ - (۳ لا - ۲ لا)$$

مسئلہ ثنائی کے ذریعہ اس کو پھیلاؤ میں تو اس کی پہلی چند قیمتیں حسب ذیل ہونگی:۔

$$۱ + (۳ لا - ۲ لا) + (۳ لا - ۲ لا) + (۳ لا - ۲ لا) + (۳ لا - ۲ لا) + (۳ لا - ۲ لا) + \dots$$

اس سے آگے بڑھنے کی ہمیں اس لئے ضرورت نہیں کہ بعد کو آنے والی تمام باتوں میں لا کی قوت لا سے زائد ہوگی۔

$$\text{پس مطلوبہ سر} = 9 \times 4 + 10 \times 3 \times (2)^2 + (-3) + 15 = 2(2) = 26$$

سوالات ۱۔ (۵)

(۱) (ا + ب - ج - د) کے پھیلاؤ میں لا ب د کا سر معلوم کرو۔

(۲) (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰) کے پھیلاؤ میں لا کا سر معلوم کرو۔

(۳) (۱ - ۲ + ۳ - ۴ + ۵ - ۶ + ۷ - ۸ + ۹ - ۱۰) کے پھیلاؤ میں لا کا سر دریافت کرو۔

(۴) (۱ + ۲ - ۳ + ۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - ۹ + ۱۰) کو لا تک پھیلاؤ۔

(۵) اگر (۱ + لا + لا + لا) کا پھیلاؤ۔

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots + 100$$

ثابت کرو کہ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots + 100 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots + 100$$

$$= 1 - 100$$

دوسرا باب

جزوی کسور

۲۲۔ متعدد کسور کا حاصل جمع آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔ اس کا منکوس عل یعنی ایسی کسروں کا دریافت کرنا جن کے نسب نامہ کسی دی ہوئی کسر کے نسب نامہ سے چھوٹے ابعاد کے ہوں اور جن کا جبری مجموعہ اس دی ہوئی کسر کے مساوی ہو، اعلیٰ ریاضی میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ ان کسروں کو دی ہوئی کسر کی جزوی کسریں کہتے ہیں۔

جس کسری جزوی کسریں مطلوب ہیں اس کے شمار کنندہ کو کسی معین حرف کے لحاظ سے نسب نامہ سے چھوٹے ابعاد کا تصور کر سکتے ہیں۔ اگر ا بت راؤ فی الواقع ایسا نہ بھی ہو تو شمار کنندہ کو نسب نامہ پر تقسیم کر کے اس کو بالآخر اس حالت میں لا سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں دی ہوئی کسر ایک صحیح جملہ اور ایسی کسر کے مجموعہ کے مساوی لکھی جائیگی جس میں شمار کنندہ کے ابعاد نسب نامہ کے ابعاد سے کمتر ہوں گے۔

۲۳۔ کوئی کسر جس کا نسب نامہ درجہ اول کے متعدد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں ڈھالا جاسکتا ہے، جزوی کسور کے ایک سلسلہ میں متحول ہو سکتی ہے جس کے نسب نامہ درجہ اول کے متعدد اجزائے ضربی ہوں گے۔ فرض کرو کہ دی ہوئی کسر کا نسب نامہ اجزائے ضربی (لا - لا - لا) (لا - ب) (لا - ج) کا حاصل ضرب ہے۔ اور فرض کرو کہ شمار کنندہ (لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے، جس میں ف (لا) ایسا کوئی ایک جملہ ہے جس کے ابعاد بلحاظ لا (ن - ا) سے بالاتر نہیں ہیں۔

$$\text{پس } \frac{\text{ف (لا)}}{\text{(لا - ا) (لا - ب) (لا - ج)}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا - ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{لا - ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{لا - ج}} + \dots$$

یہیں 'ا'، 'ب'، 'ج' وغیرہ (جو لا کے غیر تابع ہیں) کی قیمتیں دریافت کرنا ہے۔

اگر $\frac{ن}{پ ق}$ کوئی کسر ہے جس میں 'ن'، 'پ'، 'ق'، لا کے منطقی صحیح تقابل ہیں اور 'ن' کے ابعاد 'پ ق' سے کم درجہ کے ہیں۔ تو بشرطیکہ 'پ' اور 'ق' بلحاظ لا کے، ایک دوسرے کے لئے مفرد ہوں، دو آہہ تقابل 'ا' اور 'ب' لا کے لحاظ سے منطقی اور صحیح ایسے دریافت کئے جاسکتے ہیں کہ

$$\frac{ن}{پ ق} = \frac{ا}{پ} + \frac{ب}{پ}$$

چونکہ 'پ' اور 'ق' بلحاظ یکدیگر مفرد ہیں ہمیشہ لا کے ایسے دو صحیح تقابل فرض کرو (ج اور د) دریافت ہو سکتے ہیں جن کے لئے

$$ج ق = د پ + ا$$

$$\text{اور اس لئے } \frac{ن}{پ ق} = \frac{د ن}{ج ق} + \frac{ج ن}{پ ق} \quad \text{..... (ع)}$$

اب فرض کرو $\frac{ج ن}{پ ق} = ل + \frac{ا}{پ}$ جس میں 'ل' لا کی رتوں میں ایک صحیح جلد ہے اور 'ا' میں لا کے ابعاد 'پ' سے کمتر ہیں اور اس طرح فرض کرو $\frac{د ن}{ج ق} = م + \frac{ب}{ق}$ ۔ چونکہ 'ن' کے ابعاد 'پ ق' سے کمتر ہیں اس لئے تامل (د) سے یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ $ل + م = .$ اور

$$\frac{ن}{پ ق} = \frac{ا}{پ} + \frac{ب}{ق} \quad \text{..... (ب)}$$

مسادات (ب) سے یہ فوراً واضح ہوتا ہے کہ اگر 'ع'، 'ب'، 'ج'، تمام بلحاظ ایک دوسرے کے مفرد ہوں تو ہم ہمیشہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، بلحاظ 'ا'، 'ع'، 'ب'، 'ج'، سے کمتر ابعاد کے ایسے تقابل دریافت کر سکتے ہیں کہ

$$\frac{ن}{ع' ب' ج'} = \frac{ا}{ع} + \frac{ب}{ب'} + \frac{ج}{ج'} + \dots$$

مثال (۱) — کسر $\frac{لا + ۲}{(لا + ۳ + ۴)}$ پر غور کرو۔

نسب ناما کے اجزائے ترکیبی $(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)$ اور $(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)$ کھے جاسکتے ہیں۔

$$\text{اور } \lambda^2 + \lambda^2 + 1 \quad \lambda^2 + \lambda^2 + 1$$

$$\frac{(1-\lambda)(1+\lambda^2+\lambda^2)(\lambda^2+\lambda^2+1)}{\lambda^2+\lambda^2+1}$$

$$\lambda^2 + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 + \lambda^2 + 1$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda^2+1) - 1 + \lambda^2 + \lambda^2 = \lambda^2$$

$$(1-\lambda)\{(\lambda^2+\lambda^2+1) - \lambda^2 + \lambda^2 + 1\} - 1 + \lambda^2 + \lambda^2 =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda^2+1) - \lambda^2 + \lambda^2 + 1 =$$

$$\lambda^2 + \lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + \lambda^2 + 1) - (\lambda^2 + \lambda^2 + 1) = (\lambda^2 + \lambda^2 + 1)$$

$$\frac{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)(1-\lambda)}{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)\lambda^2} - \frac{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)\lambda^2}{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)\lambda^2} = \frac{\lambda^2 + \lambda^2 + 1}{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)\lambda^2}$$

$$\left\{ \frac{\lambda^2 + \lambda^2 + 1}{\lambda^2 + \lambda^2 + 1} - 1 \right\} \frac{1}{\lambda^2} - \left\{ \frac{\lambda^2 + \lambda^2 + 1}{\lambda^2 + \lambda^2 + 1} - 1 \right\} \frac{1}{\lambda^2} =$$

$$\frac{\lambda^2 + \lambda^2 + 1}{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)\lambda^2} - \frac{\lambda^2 + \lambda^2 + 1}{(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)\lambda^2} =$$

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)} \quad \text{مثال (۲)}$$

یہاں نسب ناما کے اجزائے ترکیبی $(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)$ اور $(\lambda^2 + \lambda^2 + 1)$ پر غور کرو۔

$$\lambda^2 + \lambda^2 + 1 \quad \lambda^2 + \lambda^2 + 1$$

$$\frac{(1+\lambda^2)\lambda^2 + \lambda^2 + 1}{\lambda^2 + \lambda^2 + 1}$$

$$پس \quad {}^2(3+u)u - {}^2(2+u) = 8 + 13u$$

$$اور \quad (10+13u)(8+13u) - {}^2(2+u)9 = 1$$

$$(10+13u) \{ {}^2(3+u)u - {}^2(2+u) \} - {}^2(3+u)9 =$$

$${}^2(2+u)(10+13u) - {}^2(2+u)(9+10u+13u^2) =$$

$$لہذا \quad \frac{(10+13u)^2 u}{{}^2(3+u)} - \frac{(9+10u+13u^2)^2 u}{{}^2(2+u)} = \frac{{}^2 u}{{}^2(3+u) {}^2(2+u)}$$

$$\frac{42+13u}{{}^2(3+u)} - 8+13u - \frac{42+13u}{{}^2(2+u)} + 8-13u =$$

$$\frac{42+13u}{{}^2(3+u)} - \frac{42+13u}{{}^2(2+u)} =$$

مصرعہ بالا مثالوں سے معلوم ہو گیا کہ بالعموم $\frac{ن}{م} = \frac{ج}{ب} + \frac{ا}{ب} + \frac{ج}{ب}$ اس طریقہ عمل سے ہم چند مثالوں کو حل کر کے بتائیں گے:-

$$(۱) \text{ کسر } \frac{14+11u+u^2}{(3+u)(4-u)} \text{ کو جزئی کسروں میں علیحدہ کرو۔}$$

چونکہ شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{14+11u+u^2}{(3+u)(4-u)} = \frac{ج}{3+u} + \frac{ب}{2+u} + \frac{ا}{2-u}$$

جس میں ا، ب اور ج مستقل ہیں۔

مساوات کے دونوں جانب $(3+u)(4-u)$ سے ضرب دینے سے

$$14+11u+u^2 = 1(3+u)(2-u) + 2(3+u) + 4(2-u)$$

$$\text{یعنی } 14+11u+u^2 = 1(3+2u-u^2) + 2(3+u) + 4(2-u)$$

چونکہ آخری مساوات لاکھ تمام قیمتوں کے لیے صادق آنی چاہیے۔

$$14+11u+u^2 = 1(3+2u-u^2) + 2(3+u) + 4(2-u)$$

$$\text{جس سے } 1 = 1 \text{، } 2 = 2 \text{ اور } 3 = 3$$

$$\text{پس } \frac{2}{3+5} - \frac{1}{2+5} + \frac{2}{2-5} = \frac{12+11+2}{(3-5)(2+5)}$$

اگر نسب نما کے اجزائے ضربی سب کے سب خطی اور ایک دوسرے سے مختلف ہوں جیسا کہ مثال بالا میں ہم دیکھتے ہیں تو ذیل کا خاص طریقہ زیادہ سہل ہوگا۔

مساوات $12+11+2 = 12+11+2$ $2(2+5) + 1(2-5) + 2(3+5)$ ج $(2+5)(2-5)$ میں لاکو باری باری سے ایسی قیمت دی جائے کہ اصل کسر کے نسب نما کے اجزائے ضربی میں سے ایک ایک جزو صفر ہو جائے یعنی $2 = 5$ ، $1 = 5$ اور $3 = 5$

جب $2 = 5$ تو مساوات ہو جاتی ہے $20 = 20$ جس سے $2 = 1$
جب $1 = 5$ تو مساوات ہو جاتی ہے $2 = 2$ جس سے $1 = 1$
اور جب $3 = 5$ تو مساوات ہوتی ہے $10 = 10$ جس سے $3 = 2$

مثال — $\frac{15+2}{(5+12+2)(1-5)}$ کو جزئی کسروں میں تحلیل کرو۔

$$\text{فرض کرو } \frac{15+2}{(5+12+2)(1-5)} = \frac{2}{1-5} + \frac{\text{ب} + \text{ج}}{5+12+2}$$

[یہاں یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ بائیں جانب کے جملہ کی دوسری رقم کا نسب نما لحاظ لا دوم درجہ کا ہے اور شمار کنندہ پہلے درجہ کا۔]

$$\text{پس } 15+2 = 17 = 2(5+12+2) + (\text{ب} + \text{ج})(1-5)$$

$17 = 17$ لکھنے سے ہمیں مائل ہوتا ہے $17 = 17$ پس $2 = 1$
مساوات بالا میں $2 = 1$ لکھ کر جملوں کو ترتیب دینے سے

$$17 - 17 = 0 = (\text{ب} + \text{ج})(1-5)$$

یا $(1-5)$ پر تقسیم کرنے سے $\text{ب} + \text{ج} = 0$

$$\text{لہذا } \frac{15+2}{(5+12+2)(1-5)} = \frac{2}{1-5} + \frac{0}{5+12+2}$$

[اگر لا + ۱۲ + ۵ کے اجزائے ترکیبی دریافت کئے جائیں تو ملتف جملے لا + ۱ + ۲ + ۳ اور لا + ۱ - ۲ + ۳ حاصل ہونگے جہاں $لا - ۱ = ۱ - لا$ اور زیر بحث کسور کے حسب ذیل اجزائے ضربی برآمد ہونگے :-

$$\frac{۲}{لا - ۱} \times \frac{۳ + لا}{۲ + لا} - \frac{۱}{۲ + لا} \times \frac{۳ - لا}{۲ + لا} = \frac{۲(۳ + لا) - (۳ - لا)}{(لا - ۱)(۲ + لا)}$$

اس کا علی طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے۔ [۳۴ - اگر کسور کے نسب نامہ کے بعض اجزائے ترکیبی ایک یا اس سے زیادہ مرتبہ دہرائے جائیں

یعنی کسر $\frac{ف(لا)}{حت(لا)}$ ہو اور بطور مثال اگر

نسب نامہ $\frac{ف(لا)}{حت(لا)} = \frac{(۱ + لا + ب)}{(۱ + لا + ب)} \times \frac{(۱ + لا + ب)}{(۱ + لا + ب)} \times \frac{(۱ + لا + ب)}{(۱ + لا + ب)}$ ہو تو ہم فرض کرتے ہیں کہ

$$\frac{ف(لا)}{حت(لا)} = \frac{۱ + لا + ب}{۱ + لا + ب} + \frac{۱ + لا + ب}{۱ + لا + ب} + \frac{۱ + لا + ب}{۱ + لا + ب} + \dots (۱)$$

واضح ہو کہ دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ کا درجہ اس کے نسب نامہ کے درجہ سے کمتر ہے اور شمار کنندہ اور نسب نامہ کے مابین کوئی مشترک جزو ترکیبی نہیں ہے۔ جزئی کسور کے لئے جو رقیں فرض کی گئی ہیں ان پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ایک درجی کثیر رقمی جملہ لا + ب، ایسے کسور کے نسب ناموں میں جن کے شمار کنندے ایک ہی شکل کے یعنی ایک مستقل ہوتے ہیں، پہلے اور نیز دوسرے درجہ میں موجود ہے۔ اسی طرح دو درجی کثیر رقمی جملہ لا + ب + لا، ایسے کسور کے نسب ناموں میں جن کے شمار کنندے ایک ہی شکل کے یعنی ایک درجی کثیر رقمی جملے ہیں، پہلے اور نیز دوسرے درجہ میں موجود ہے۔ [اگر طالب علم ایسے نسب ناموں والی کسروں کو آزمائش کے لیے لکھ کر

معمولی قواعد سے ان کا جبری حاصل جمع نکالے تو معلوم ہوگا کہ اس کی شکل ہو بہو $\frac{ف(لا)}{ف(لا)}$ کی سی ہوگی۔

اگر ہم مساوات (۱) کو $ف(لا)$ سے ضرب دیں تو ہمیں بلحاظ لچھے درجہ کی ایک مساوات ملیگی، چونکہ ہمارا مفروضہ ہے کہ $ف(لا)$ کا درجہ $ف(لا)$ کے درجہ سے چھوٹا ہے۔ پس مساوات کے دونوں جانب $لا^۲$ ، $لا$ ، ۱ اور $لا$ کے سروں اور مستقل رتوں کو ایک دوسرے کے مساوی لکھنے سے ہمارے لیے سات غیر معلوم مستقلوں $ا$ ، $ا$ ، $ا$ ، $ا$ ، $ا$ ، $ا$ ، $ا$ کی تعین کے لئے سات مساواتیں مہیا ہو جاتی ہیں۔

پس واضح ہے کہ اگر یہ فرض کر لیا جائے کہ ایسے مستقل موجود ہیں تو ان کی تعین کا مصرعہ بالا طریقہ بالکل عام ہے۔ بطور مثال چند سوال حل کیے جاتے ہیں۔

$$(۱) \quad \frac{۳لا^۳ + لا^۲ - لا - ۸لا - ۱۱ + ۹}{۲(۱ - لا)^۲} \text{ کو جڑی کسروں میں تحلیل کرو۔}$$

$$\text{معمولی تقسیم کے عمل سے دی ہوئی کسر} = \frac{۳}{۲} + لا + \frac{۱}{۲} + \frac{لا^۳ - لا^۲ - لا - ۸لا - ۱۱ + ۹}{۲(۱ - لا)^۲}$$

$$\text{اب فرض کرو کہ} \quad \frac{ا}{۲(۱ - لا)} + \frac{ب}{۱ - لا} = \frac{لا^۳ - لا^۲ - لا - ۸لا - ۱۱ + ۹}{۲(۱ - لا)^۲}$$

$$+ \frac{ج + لا}{۲(۱ + لا + لا^۲)} + \frac{ع + لا + ف}{۱ + لا + لا^۲}$$

اور کسور سے صاف کرو۔ نتیجہ ہے

$$لا^۳ - لا^۲ - لا - ۸لا - ۱۱ + ۹ = (ب + ع) لا^۳ + (ا + ب - ع + ف) لا^۲$$

$$+ (ا + ب + ج - ف) لا + (ا + ب - ج - د - ع) لا^۰$$

$$+ (ا + ب + ج + د - ع - ف) لا + (ا + ب + د + ف)$$

لا کی مساوی قوتوں کے سروں کو باہم دیگر مساوی لکھنے سے ہمیں ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں:-

+ ماکہ بلند تر قوتوں والی رقیس
 مساوات کے بائیں جانب = ۱ + ب + ج + د + ا × صحیح جلد ماکہ رقیس میں
 پس 'ا'، 'ب'، 'ج' کے سروں کو باہر دیگر مساوی لکھنے سے

$$۱ = \frac{۳}{۲} \text{ 'ب' } = \frac{۱-۳}{۲} \text{ 'ج' } = \frac{۳(۱-۲)}{۱+۲}$$

$$\text{اس لیے } \frac{۱}{۲-۱} \times \frac{۳(۱-۲)}{۱+۲} + \frac{۱}{۲(۲-۱)} \cdot \frac{۱-۳}{۲} - \frac{۱}{۲(۲-۱)} \cdot \frac{۳}{۲} = \frac{۳(۱+۲)}{۲(۲-۱)}$$

+ ایک صحیح جلد (۱-۳) ویں درجہ کا -

پہلی تین رقیسوں کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلانے سے (پہلی مثال کی طرح)،
 ہمیں لاگت کا سر معلوم ہو جاتا ہے -
 ۲۶ - کسی کسر کے جزئی کسور میں تحلیل ہونے کے امکان کا ثبوت -

فرض کرو کہ دی ہوئی کسر $\frac{ف(لا)}{ف(لا)}$ ہے جس میں ف (لا) اور ف (لا)

ایسے کثیر رقی جملے ہیں جن کے درمیان کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہے -
 فرض کرو کہ لا - ر نسب نامہ ف (لا) کا ایک ایسا خطی یا ایک درجی
 جزو ضربی ہے جو م مرتبہ دہرایا جاتا ہے - اور ف (لا) بقیہ
 اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے - تب ف (لا) = (لا-ر) ف (لا) اور

$$(۱) \quad \frac{ف(لا)}{ف(لا)} = \frac{ف(لا-ر) ف(لا)}{ف(لا)}$$

$$(۲) \quad \frac{ف(لا)}{ف(لا-ر) ف(لا)} + \frac{۱}{ف(لا-ر)} = \frac{ف(لا)}{ف(لا-ر) ف(لا)}$$

مثلاً صحیح ہے، ا خواہ کوئی مستقل ہو -
 اگر ہم ایسا دریافت کریں کہ

$$(۳) \quad \frac{ف(لا)}{ف(لا-ر) ف(لا)} = \frac{۱}{ف(لا-ر)}$$

تب ف (لا) - ا ف (لا) - لا - ر پر تقسیم ہو سکیگا اور ہم اس کی
(لا - ر) ف (لا) کے ذریعہ تعبیر کر سکیں گے۔
لیکن ہمارے مفروضہ سے نہ تو ف (لا) اور نہ ف (لا) لا - ر پر
تقسیم ہو سکتا ہے اور اس لیے ف (ر) اور ف (لا - ر) سے
پس (۳) سے

$$1 = \frac{ف (ر)}{ف (لا)} \dots \dots \dots (۴)$$

ایک مستقل جو کہ صفر نہیں ہے۔
ا کی اس قیمت کے ساتھ

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{1}{(لا - ر)} + \frac{ف (لا)}{ف (لا - ر) ف (لا)} \dots \dots \dots (۵)$$

یہی طریقہ کے ساتھ استعمال کرنے سے ہمیں مل جاتا ہے

$$\frac{ف (لا)}{(لا - ر) ف (لا)} = \frac{1}{(لا - ر)} + \frac{ف (لا)}{(لا - ر) ف (لا)}$$

جس میں $1 = \frac{ف (ر)}{ف (لا)}$ اور $(لا - ر) ف (لا) = ف (لا) - ا ف (لا)$
لیکن یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ا صفر ہو سکتا ہے اس لیے کہ ف (لا - ر) صفر
ہو سکتا ہے۔ لیکن ا ناقابلِ تقسیم نہیں ہو سکتا اس لیے کہ ف (لا - ر) صفر
یہ طریقہ متواتر م مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{1}{(لا - ر)} + \frac{1}{(لا - ر) ف (لا)} + \frac{1}{(لا - ر) ف (لا) ف (لا)} + \dots \dots \dots$$

جس میں $1 = \frac{ف (ر)}{ف (لا)}$ ا سب محدود مستقل ہیں جن میں سے صرف
ایسا ہے جو صفر نہیں ہو سکتا۔

اس استدلال سے یہ واضح ہو سکتا ہے کہ نسب نامے کسی ایسے قطعی

جزوی ضربی کے لحاظ سے جو م مرتبہ واقع ہوتا ہے، ہم م کسریں فرض کر سکتے ہیں جن کے شمار کنندہ مستقل ہیں اور جن کے نسب ناما اس جزوی ضربی کی علی الترتیب، م - وین، (م - ۱) - وین، پہلی قوتیں ہیں۔
ان کسروں کو دور کرنے کے بعد بقیہ کسریں یعنی $\frac{م (لا)}{ف (لا)}$ کے ساتھ ہم اسی طرح عمل کر سکتے ہیں۔

مندرجہ بالا بحث میں ر اور ف (لا) اور ف (لا) کے حقیقی ہو سکتے ہیں یا ملحق۔ بدین وجہ یہ طریقہ علی التواتر، ف (لا) کے ہر ایک جزوی ضربی کے ساتھ استعمال کیا جاسکتا ہے اور اسی طرح مجزی کسور میں مکمل تحلیل ہو سکتی ہے۔ اگر ف (لا) اور ف (لا) کے حقیقی سر ہوں اور ہم چاہتے ہیں کہ صرف حقیقی کثیر رقمی جملوں کی حد تک اپنے آپ کو محدود رکھیں تو ہم یہ طریقہ صرف حقیقی خطی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کرینگے اور آئندہ فصل میں دو درجی اجزائے ضربی سے بحث کرینگے۔

۴۷ - ایسی صورت میں جبکہ نسب ناما ف (لا) کا جزوی ضربی دو درجی اور شکل (لا - ۱) + ب^۱ ہوتا ہے جو حقیقی خطی اجزائے ضربی میں تحلیل نہیں ہو سکتا فرض کرو

$$ف (لا) = \{ (لا - ۱) + ب^۱ \} ف (لا)$$

$$تب \frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{ف (لا)}{\{ (لا - ۱) + ب^۱ \} ف (لا)} \dots \dots (۱)$$

اب مساوات (۱) $\frac{ف (لا)}{\{ (لا - ۱) + ب^۱ \} ف (لا)} = \frac{ف (لا - ۱) + ب^۱}{ف (لا - ۱) + ب^۱ + ب^۱ ف (لا)}$ متساوی کر لیں، ۱ اور ب کوئی سے مستقل ہیں۔
اگر ہم ۱ اور ب کی قیمتیں معلوم کریں، ایسی کہ

$$ف (لا - ۱) - \{ (لا - ۱) + ب^۱ \} ف (لا) = ۰ \dots \dots (۲)$$

$$اور ف (لا - ۱) - \{ (لا - ۱) + ب^۱ \} ف (لا) = ۰$$

نہ ہوں اور دوسرے مستطوں میں سے کوئی بھی یا سب کے سب ممکن ہے کہ صفر ہوں۔

ظاہر ہے کہ یہی طریقہ ف (لا) کے دو درجی اجزائے ضربی میں سے ہر ایک کے ساتھ استعمال ہو سکتا ہے۔
الحاصل اگر

ف (لا) = (لا - ر_۱) (لا - ر_۲) { (لا - ل_۱) + (لا - ل_۲) + }
اور ہم مندرجہ بالا طریقے علی التواتر ایک درجی اجزائے ضربی کے ساتھ استعمال کریں اور پھر دو درجی اجزائے ضربی کے ساتھ علی التواتر استعمال کریں تو بالآخر

$$\frac{ف (لا)}{ف (لا)} = \frac{لا - ر_1}{لا - ر_1} + \frac{لا - ر_2}{لا - ر_2} + \dots + \frac{لا - ل_1}{لا - ل_1} + \frac{لا - ل_2}{لا - ل_2} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{ج + لا - د}{ج + لا - د} + \frac{ج + لا - ب}{ج + لا - ب} + \dots + \frac{ج + لا - ا}{ج + لا - ا} + \dots$$

جہاں آ یا تو صفر ہے یا لا کا ایک صحیح جملہ ہے۔

لیکن اگر ف (لا) کا درجہ ف (لا) کے درجے سے کمتر ہے اور یہ یاد رکھنا چاہیے کہ ہم دی ہوئی کسر کو ہمیشہ فی الواقعی عمل تقسیم سے اس حالت میں تبدیل کر سکتے ہیں $\frac{ف (لا)}{ف (لا)}$ اور تمام کسریں مساوات کے بائیں جانب کی صفر ہو جاتی ہیں جبکہ $لا = \infty$ ، اس لئے آ صفر ہے اور دی ہوئی کسر مصرعہ جزئی کسور میں تحلیل ہو جاتی ہے۔

دوسرے باب کی مثالیں

مندرجہ ذیل کسروں کو جزئی کسور میں تحلیل کرو:-

$$(۱) \quad \frac{۹-۲}{(۷۳-۱)(۷۲-۱)} \quad (۲) \quad \frac{۵+۴}{۳(۷-۱)}$$

$$(۳) \quad \frac{۳+۷۷+۲۷۳}{(۵+۷۲+۲۷)(۱+۷)} \quad (۴) \quad \frac{۱+۷}{۱+۷}$$

$$(۵) \quad \frac{۱+۷+۲۷}{۶+۷+۲۷-۳۷} \quad (۶) \quad \frac{۲۷-۷۷+۱}{(۷۱۰-۱)²(۷۳+۱)}$$

$$(۷) \quad \frac{۲+۲۷}{(۱+۲۷)²(۲-۷)} \quad (۸) \quad \frac{۷۲+۱}{(۱+۷)³(۲+۷)²}$$

$$(۹) \quad \text{ثابت کرو کہ } \frac{۵+۷}{(۲+۷)(۱-۲۷)} \text{ کے پھیلاؤ میں } ۱-۵۲ \text{ کا سر}$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۲۷}$$

$$(۱۰) \quad \text{کے پھیلاؤ میں } ۱-۷ \text{ کا سر دریافت کرو۔}$$

$$(۱۱) \quad \text{ثابت کرو کہ } \frac{۱}{۷-۱} + \frac{۱}{۷-۱} + \frac{۱}{۷-۱} + \frac{۱}{۷-۱} + \dots$$

$$= \frac{۱}{۷-۱} + \frac{۱}{۷-۱} + \frac{۱}{۷-۱} + \frac{۱}{۷-۱} + \dots$$

تیسرا باب

مقطعات

(Determinants)

۳۸۔ مقطعات مسائل طبیعیات میں زیادہ تر پیچیدہ اور متعدد نامعلوم مقادیر کی ہمزاد مساواتوں کے حل کے لیے استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ہم اس باب کا آغاز آسان ہمزاد مساواتوں کی مثال سے شروع کرتے ہیں۔

اگر خطی (یعنی یک درجی) مساواتیں

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

دی جائیں تو ابتدائی الجبرا کے طریقوں سے آسانی مستنبط ہوتا ہے کہ

$$\frac{(b_1c_2 - b_2c_1)}{(a_1c_2 - a_2c_1)} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ان کو ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں :-

اور چونکہ تینوں نسب نما ایک ہی شکل کے ہیں اس لیے ان میں سے ہر ایک کی بہ نظر سہولت ایک خاص علامت کے ذریعہ تعبیر ہو سکتی ہے :- چنانچہ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

اس متماثل مساوات کے بائیں جانب کے رُکن کو مقطع (Determinant) کہتے ہیں اور سیدھے جانب کے رُکن کو مقطع کا پھیلاؤ۔ اعداد a, b, c, d کو 'رُکن' کہتے ہیں اور چونکہ ہر ایک رقم مقطع کے پھیلاؤ میں، دو اجزائے ترکیبی (Elements) کا حاصل ضرب ہے، یہ مقطع دوسرے رُتبہ (Order) کا کہلاتا ہے۔

پس دوسرے رُتبہ کے مقطع کا پھیلاؤ اس طرح عمل میں آتا ہے کہ سیدھے جانب سے بائیں جانب کو نیچے کی طرف گزرنے والے وتر پر کے اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب لیا جائے اور اس میں سے دوسرے وتر پر کے اجزائے ترکیبی کا حاصل ضرب تفریق کیا جائے۔

لا اور ما کے نسب نماؤں کو بھی اگر اسی طرح تعبیر کیا جائے تو مساواتوں

$$a + b + c = 0$$

$$a + b + c = 0$$

کا حل یوں لکھا جاسکتا ہے:

$$(i) \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

جس میں ہر ایک نسب نما، سرورں کو دائری (Cyclic) ترتیب میں دو متماثل صفوں میں لکھنے سے، جبکہ زیر تعیین مقدار کے متعلقہ رقوم متروک کر دئے جاتے ہیں، تیار ہوتا ہے۔

دائری ترتیب کا مفہوم یہ ہے کہ اس کے بعد ب لکھا جائے 'ب' کے بعد 'ج' اور 'ج' کے بعد 'ا'۔ گویا کہ کسی دائرے کے محیط کے گرد 'ا' ب اور ج سرورں کو لکھ کر ترتیب وار ایک سرے سے دوسرے سر کی طرف گزریں۔

مثال (i) - مقطعات ذیل کو پھیلاؤ:-

$$(i) \quad \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \quad (ii) \quad \begin{vmatrix} 2 & 1+b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & - & 11 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{اور (iii) حل کرو}$$

$$\begin{aligned} 35 - 66 &= 9 \times 5 - 12 \times 8 = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{عمل (i)} \\ 3 &= \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{(ii)}$$

$$\begin{aligned} (2+1) &= 2 \times 1 = \text{ساوات} \\ (1+2) &= 1 \times 2 = \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & - & 11 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{(iii)}$$

$$0 = (2+1) (3-11) = (1+2) (1-12)$$

$$0 = 3 \times 8 = 1 \times 9$$

مثال (۲) - ہمزاد مساواتوں

$$11 - 6 = 25, 25 = 62 + 11 \text{ کو حل کرو}$$

ان مساواتوں کو مناسب ترتیب میں لکھنے سے

$$0 = 25 + 6 - 11$$

$$0 = 29 - 62 + 11$$

مساواتیں حاصل ہوتی ہیں -

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 25 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 25 & 11 \\ 29 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{21} = \frac{6}{354} = \frac{11}{21} \quad \text{یا}$$

$$16 = 6, 1 - = 11$$

اسی طرح ب اور ج کے لیے بھی بشرطیکہ ہر صف کے اجزائے ترکیبی دائری ترتیب میں لیے جائیں۔ ان دوسرے رتبہ کے مقطعات میں سے ہر ایک اس مجزویہ ترکیبی کا نصف کرہا کرتا ہے جو اس کو ضرب دیتا ہے۔
لا کی قیمت کا جو جملہ ہے اس کا شمار کنندہ

$$\begin{aligned} & \text{بم} + \text{دج} + \text{ج} + \text{بم} + \text{د} + \text{ج} + \text{بم} - \text{د} + \text{بم} + \text{ج} \\ & = - \text{بم} (\text{ج} + \text{د} - \text{د} + \text{ج}) - \text{ج} (\text{د} + \text{بم} - \text{بم} + \text{د}) - \text{د} (\text{بم} + \text{ج} - \text{ج} + \text{بم}) \\ & = - \text{بم} | \text{ج} + \text{د} | - \text{ج} | \text{د} + \text{بم} | - \text{د} | \text{بم} + \text{ج} | \\ & \quad | \text{ج} + \text{د} | \quad | \text{د} + \text{بم} | \quad | \text{بم} + \text{ج} | \\ & \quad | \text{ج} + \text{د} | \quad | \text{د} + \text{بم} | \quad | \text{بم} + \text{ج} | \end{aligned}$$

اسی بموجب ما اور ی کی قیمتوں کے شمار کنندہ مقطعات کی شکل میں لکھے جاسکتے ہیں۔

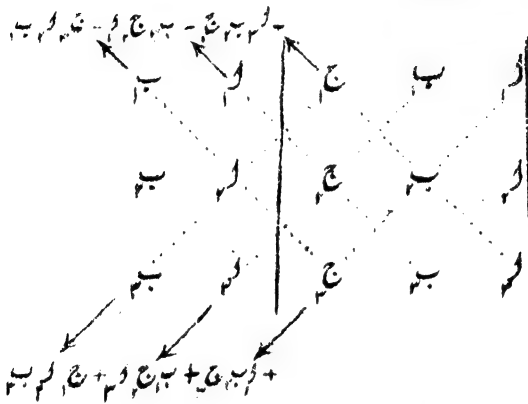
$$\begin{aligned} & \text{پس مساواتوں} \quad \text{لا} + \text{بم} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{مز} \\ & \quad \text{لا} + \text{بم} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{مز} \\ & \quad \text{لا} + \text{بم} + \text{ج} + \text{ی} + \text{د} = \text{مز} \\ & \text{کامل ذیل کی مقطعاتی شکل میں لکھا جاسکتا ہے:} \\ & \quad \text{لا} \quad \text{ی} \quad \text{ما} \end{aligned}$$

بم	ج	د	بم	ج	د	بم	ج	د	بم	ج	د
بم	ج	د	بم	ج	د	بم	ج	د	بم	ج	د
بم	ج	د	بم	ج	د	بم	ج	د	بم	ج	د

ان کے نسب بنا ٹھیک اس طرح تیار ہوئے ہیں جیسے کہ فضل (۱) کی مساواتوں کی صورت میں ہوا ہے۔ لیکن علامتیں متبادلاً منفی اور مثبت ہیں تاکہ دائری ترتیب قائم رہے۔

تیسرے رتبہ کا مقطع سائزس کے قاعدے (Rule of Sarrus)

سے باسانی پھیلا جاسکتا ہے۔ چنانچہ مقطع کے سیدھے جانب کے پہلے دو کالموں کو دہرانے کے بعد 'مصرعہ' چھ دتروں میں سے ہر ایک پر کے اجزائے ترکیبی کے حاصل ضربوں کا مجموعہ لینے سے پھیلاؤ لکھا جاسکتا ہے۔ یہ یاد رہے کہ جو حاصل ضرب نیچے کی طرف لیے جاتے ہیں وہ مثبت ہیں اور جو اوپر کی طرف لیے جاتے ہیں وہ منفی ہیں۔



مثال ۳۔ مندرجہ ذیل مقطعات کو پھیلاؤ:-

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (1) \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 + 3 + 9 - 6 - 6 - 0 = 0$$

$$0 = 0 + 3 + 9 - 6 - 6 - 0 = 0$$

یا سائزس کے قاعدے سے پھیلائے سے 'مقطعہ'

$$2 \times 2 \times 9 - 1 \times 8 \times 2 - 4 \times 5 \times 2 - 2 \times 2 \times 4 + 2 \times 8 \times 4 + 9 \times 5 \times 1 =$$

$$0 = 108 - 32 - 100 - 56 + 128 + 45 =$$

(ب) اسی طرح

جیب ۱	جیب ۲	جیب ۳	جیب ۴	جیب ۵	جیب ۶	جیب ۷	جیب ۸	جیب ۹	جیب ۱۰
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

جیب ۱ = ۱
جیب ۲ = ۲
جیب ۳ = ۳
جیب ۴ = ۴
جیب ۵ = ۵
جیب ۶ = ۶
جیب ۷ = ۷
جیب ۸ = ۸
جیب ۹ = ۹
جیب ۱۰ = ۱۰

مثالی مسئلہ: مقطعات کے ذریعہ ذیل کی مساواتیں حل کرو۔

$$0 = 10 - 2y + 6 + 4 =$$

$$0 = 4 - y - 6 - 2 =$$

$$0 = 10 + 2y - 6 - 4 =$$

چونکہ یہ مساواتیں مناسب ترتیب میں لکھی گئی ہیں۔ ان کا حل 'نتیجہ (۲)' کے ذریعہ 'علامتوں' لکھا جاسکتا ہے:-

ی -

۱

۱۰ -

۱	۲	۱۰ -	۲	۱۰ -	۲	۱۰ -	۲	۱
۲ -	۲	۶ -	۳	۶ -	۱ -	۶ -	۱۰	۲ -
۳	۴	۱۰	۴	۱۰	۲ -	۱۰	۳ -	۳

۲	۱	۲
۱ -	۲ -	۳
۳ -	۳	۴

جو مقطعات کو پھیلانے سے ہو جاتے ہیں:-

$$\frac{1}{82} = \frac{y}{220} = \frac{6}{252} = \frac{4}{148}$$

جس سے ۱۰ = ۲، ۶ = ۳، ۴ = ۵

$$= \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ل} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ل} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ل} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix} =$$

پس (۱) کسی مقطعہ کی قیمت نہیں تبدیل ہوتی ہے اگر اس کے کالموں کو صفوں میں اور صفوں کو کالموں میں تبدیل کر دیں۔

مندرجہ بالا پھیلاؤ یوں بھی لکھا جاسکتا ہے:-

$$= \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ل} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ل} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ل} & \text{ج} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ل} \end{vmatrix}$$

پس (۲) کسی مقطعہ کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے اگر اس کی دو صفیں یا اس کے دو کالم باہم دیگر تبدیل کیے جاتے ہیں۔
اسی پھیلاؤ سے - فرداً واضح ہوتا ہے کہ اگر $\text{ل} = \text{ل}$ ، $\text{ب} = \text{ب}$ اور $\text{ج} = \text{ج}$ تو مقطعہ کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ پس

$$= \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} = 0$$

پس (۳) جب دو صفیں یا کالم متماثل ہوں تو مقطعہ صفر ہو جاتا ہے۔
اب فرض کرو کہ ل ، ب ، ج کے عوض علی الترتیب م ، ن ، م لکھے جاتے ہیں

تب مقطعہ کو پھیلانے سے فرداً معلوم ہو جاتا ہے کہ

$$\begin{vmatrix} \text{م} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{م} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{م} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۴) کسی صف یا کالم کے ہر جزو ترکیبی کو کسی دیے ہوئے جزو ضربی سے ضرب دینے کا نتیجہ وہی ہوتا ہے جو مقطعہ کو اس جزو ضربی سے ضرب دینے سے پیدا ہوتا ہے۔

اب فرض کرو کہ $\text{ل} = \text{م} + \text{ف} + \text{ب} = \text{ب} + \text{ق} + \text{ج} = \text{ج} + \text{ک}$ تب مقطعہ کو پھیلانے سے اس کی شکل

$$\begin{vmatrix} \text{م} + \text{ف} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ک} \\ \text{ج} & \text{ک} & \text{ک} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{م} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ک} \\ \text{ج} & \text{ک} & \text{ک} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

جو تین درجے کے دو مقطعوں کے پھیلاؤں کا مجموعہ ہے۔ پس

$$\begin{vmatrix} \text{م} + \text{ف} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{ب} & \text{ج} & \text{ک} \\ \text{ج} & \text{ک} & \text{ک} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ل} & \text{ل} & \text{ل} \\ \text{ب} & \text{ب} & \text{ب} \\ \text{ج} & \text{ج} & \text{ج} \end{vmatrix}$$

پس (۵) جب کسی صف یا کالم کا ہر ایک جزو ترکیبی دو یا زائد رقموں کے جبری مجموعہ پر مشتمل ہوتا ہے تو مقطعہ دو یا زائد مقطعوں کا حاصل جمع ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک کا جزو ترکیبی ایک واحد رقم پر مشتمل ہوتا ہے۔

پس پہلا پھیلاؤ دیا جاتا ہے بذریعہ

ق = $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n+1} n^2$ (۱)
 جہاں n (۱، ۲، ۳، ...) سفیر ہے اور k ۔ اور وہ ایک مقطع ہے
 جو n والی صف اور کالم کو متروک کر دینے اور صفوں کو دائری ترتیب میں
 لکھنے سے تیار ہوتا ہے۔ ہر ایک سفیر (۱-۱) میں رتبہ کا ہے جبکہ
 ق، n میں رتبہ کا ہے۔ مقطعات کے حل میں علما اس قاعدے کے
 ساتھ مصرعہ بالا چھ خواص سے مدد لی جاتی ہے۔ جیسا کہ ذیل کی مثال
 سے ظاہر ہوگا۔

مثال (۶) مساواتوں

$$14 - 12 + 10 - 8 + 6 - 4 + 2 - 1 = 3$$

$$22 - 20 + 18 - 16 + 14 - 12 + 10 - 8 + 6 - 4 + 2 - 1 = 2$$

$$44 - 40 + 36 - 32 + 28 - 24 + 20 - 16 + 12 - 8 + 6 - 4 + 2 - 1 = 5$$

$$64 - 60 + 56 - 52 + 48 - 44 + 40 - 36 + 32 - 28 + 24 - 20 + 16 - 12 + 10 - 8 + 6 - 4 + 2 - 1 = 8$$

کو حل کرو، پہلے لا معلوم کر کے اور پھر لاکھ قیمت کو کام میں لا کر دیے ہوئے نظام
 کو تین ہندس مساواتوں میں محول کر کے۔
 لاکھ قیمت ملتی ہے بذریعہ

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

15	4	12	-	14	3	15	4	12	-	14	جہاں ق =
11	3	2	-	22	2	11	3	2	-	22	
14	1	10	-	24	4	14	11	10	-	24	
19	12	38	-	4	5	19	10	38	-	4	

15	4	12	-	14	3	15	4	12	-	14	پہلے ق کو
11	3	2	-	22	2	11	3	2	-	22	
14	1	10	-	24	4	14	11	10	-	24	
19	12	38	-	4	5	19	10	38	-	4	

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳ & ۰ & ۰ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۵ & ۲ \\ \hline ۲ & ۲ & ۹ & ۱۲ \\ \hline ۵ & ۶ & ۲۱ & ۱۸ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۳ & ۰ & ۰ & ۲ \\ \hline ۲ & ۱ & ۳ & ۲ \\ \hline ۲ & ۲ & ۱۱ & ۱۲ \\ \hline ۵ & ۶ & ۱۰ & ۱۸ \\ \hline \end{array} =$$

پہلے کالم کے دو چند اور جو تھے کالم کے حاصل جمع کو دوسرے کالم میں سے
رہنے کرنے سے :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱ & ۵ & ۳ & ۳ \\ \hline ۲ & ۹ & ۱۲ & \\ \hline ۶ & ۲۱ & ۱۸ & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۲ & ۱ & ۵ & ۲ \\ \hline ۲ & ۲ & ۹ & \\ \hline ۵ & ۶ & ۲۱ & \\ \hline \end{array} =$$

اور جو تھے
(۳)
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱۳ & ۱۲ & ۲ & \\ \hline ۲۵ & ۱۴ & & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱ & ۵ & ۱ & ۹ \\ \hline ۲ & ۹ & ۲ & \\ \hline ۶ & ۲۱ & ۶ & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۰ & ۱ & ۰ & ۲ \\ \hline ۱۲ & ۳ & ۱۲ & \\ \hline ۱۲ & ۲ & ۲۵ & \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱ & ۱۲ & ۲ & \\ \hline ۲۸ & ۱۴ & & \\ \hline \end{array} = ۶۳۸$$

اور قی
$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱۵ & ۵ & ۳ & ۱۵ \\ \hline ۱۱ & ۰ & ۸ & ۱۲ \\ \hline ۱۶ & ۱ & ۲۶ & ۲۴ \\ \hline ۱۹ & ۲۸ & ۱۹ & ۴ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱۵ & ۶ & ۱۲ & ۸ \\ \hline ۱۱ & ۳ & ۳ & ۱۱ \\ \hline ۱۶ & ۱۱ & ۱۰ & ۳۸ \\ \hline ۱۹ & ۱۰ & ۳۸ & ۳ \\ \hline \end{array} = ۲$$

کالموں ۱ اور ۳، ۲ اور ۴، ۲ اور ۳ کو جمع کرنے سے

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۰ & ۰ & ۳ & ۰ \\ \hline ۱۱ & ۱۲ & ۸ & ۲۶ \\ \hline ۱۳ & ۲۲ & ۲۶ & ۱۰۳ \\ \hline ۶۵ & ۴۴ & ۱۹ & ۱۰۲ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline ۱۵ & ۱۵ & ۳ & ۱۵ \\ \hline ۱۱ & ۰ & ۸ & ۱۲ \\ \hline ۱۶ & ۳ & ۲۶ & ۲۴ \\ \hline ۱۹ & ۸۳ & ۱۹ & ۴ \\ \hline \end{array} = \frac{۲}{۳}$$

کالم ۲ کے ۵ گئے کو کالم ۱ میں سے تفریق کرنے اور کالموں ۱ اور

۳ کو، ۱ اور ۳ اور ۴ کو جمع کرنے سے

۱ -	۱۱	۳	۲ =	۲۶ -	۱۱	۱۲	۲ =		
۶۶ -	۱۳	۱۱		۱۰۳ -	۱۳	۲۲			
۳۰ -	۶۵ -	۱۲ -		۱۰۲	۶۵ -	۶۶ -			
۱	.	.	۲ =	۱	۲	۳	۲ =		
۶۶	۱۵۲ -	۳۵ -		۶۶	۲۰ -	۱۱			
۳۰	۱۰۹ -	۲۳ -		۳۰	۲۹ -	۱۲ -			
۶۳۸ =	۱۲	۱ -	۲ =	۱۲	۳۵	۲ =	۱۵۲	۳۵	۲ =
	۱۶	۷۸ -		۱۶	۲۳		۱۰۹	۲۳	

$$\frac{۱۰۹}{۱۶} = ۶ \frac{۱۳}{۱۶}$$

یہ قیمت پہلی، دوسری اور چوتھی مساواتوں میں درج کرنے سے مساواتوں کا نظم ام:

$$۰ = ۱۹ + ۱۵ + ۷ + ۱۲ -$$

$$۰ = ۲۲ + ۱۱ + ۳ + ۳ -$$

$$۰ = ۱ - ۱۹ + ۱۰ + ۳۸ -$$

ہو جاتا ہے جس کا حل یہ ہے:

۱۵	۷	۱۲ -	۷	۱۲ -	۱۹	۱۲ -	۱۹	۱۵	۷
۱۱	۳	۳ -	۳	۳ -	۲۲	۳ -	۲۲	۱۱	۳
۱۹	۱۰	۳۸ -	۱۰	۳۸ -	۱ -	۳۸ -	۱۰	۱۹	۱۰

ان میں سے

۰	۱	۰	۰	۱	۷	۲	۱	۷	۱۹	۱۵	۷
۷ -	۵	۳۲ -	۷ -	۵	۳	۱۳	۵	۳۰	۲۲	۱۱	۳
۱۶ -	۱ -	۱۷	۱۶ -	۱ -	۱۰	۲۰ -	۱ -	۱۰	۱ -	۱۹	۱۰

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline ۶۳۱ = & ۳۲ - & - - = \\ \hline & ۱۶ & ۱۶ - \\ \hline \end{array}$$

اسی طرح دوسرے مقطعات کو پھیلائے سے

$$\frac{۱}{۶۳۱} = \frac{سہ}{۱۸۹۳} = \frac{سی}{۱۲۶۲} = \frac{۱}{۶۳۱}$$

جس سے ۱ = ۱ - سی = ۲ = سہ = ۳ -

۳ قسبتیں تیسری مساوات کے لیے بھی صادق آتی ہیں، پس مساواتوں کا مکمل حل مل گیا ہے۔

۳۲ - استقفاط — جب خطی متجانس مساواتوں کا ایک نظام غیر معلوم متغیر کی تعداد سے زیادہ مساواتوں پر مشتمل ہوتا ہے تو عموماً یہ ممکن نہیں کہ غیر معلوم متغیر کی قسبتیں دریافت کی جائیں جو ایک ساتھ (وقت واحد میں) اس نظام کے لیے صادق آئیں جب کہ تمام مساواتیں ایک دوسرے کے غیر تابع ہوتی ہیں۔

جب قسبتوں کا ایک مکمل جٹ ایک ساتھ (وقت واحد میں) غیر معلوم متغیر کی (م + ن) مساواتوں کے نظام کے لیے فی الواقع صادق آتا ہے تو ان مساواتوں میں سے م مساواتیں غیر تابع نہیں ہوتی ہیں اور ایسا نظام باثبات (Consistent) کہلاتا ہے۔

$$\begin{array}{l} \text{فرض کرو} \\ ۱. ۱ + ۲ + ۳ = ۶ \\ ۲. ۲ + ۳ + ۴ = ۹ \\ ۳. ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲ \\ ۴. ۴ + ۵ + ۶ = ۱۵ \end{array}$$

$$۱. ۱ + ۲ + ۳ = ۶$$

$$۲. ۲ + ۳ + ۴ = ۹$$

$$۳. ۳ + ۴ + ۵ = ۱۲$$

$$۴. ۴ + ۵ + ۶ = ۱۵$$

ایک باثبات نظام ہے۔ تب آخری تین مساواتوں سے

۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۵
۳	۴	۵	۶

تو ایک مساوات حاصل کرو جس سے م دریافت ہو جائے۔
 اس مساوات کو حل کرو اور متعدد دھلوں کے متناظر لا، ما اور ی
 کی باہمی نسبتیں دریافت کرو۔
 [جامعہ لندن]
 دی ہوئی مساوات ٹھیک اس شکل میں نہیں ہے جو فصل (۳۲) میں
 دی گئی ہے۔ لیکن اگر غیر معلوم مقادیر کو لا، ما اور ی کی نسبتیں تصور
 کیا جائے، جو ہر ایک مساوات کو بائٹھ لا، ما، ی میں سے کسی ایک
 پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوں تو وہ فوراً فصل (۳۲) والی شکل میں منتقل
 ہو جاتی ہے۔ چنانچہ فرض کرو کہ

$$x = \frac{a}{y} \quad \text{اور} \quad y = \frac{b}{x}$$

تب یہ فرض کر کے کہ ی کی قیمت صفر نہیں ہے۔ نظام

$$a = b + c + d + e + f$$

$$b = c + d + e + f$$

$$c = d + e + f$$

ہو جاتا ہے۔ پس (۵) کی رو سے اس نظام کے اثبات ہونے کی
 شرط یہ ہوتی ہے:-

$$a = \begin{vmatrix} b & c & d & e & f \\ c & d & e & f \\ d & e & f \\ e & f \\ f \end{vmatrix}$$

یہ دیکھتے ہوئے نظام میں لا، ما، ی کا حاصل اسقاط ہے۔

دوسرے نظام میں، کسور کو صاف کرو اور لا، ما، ی کو م
 اور و میں شکل میں تبدیل کرو۔ تب

$$a = 2 - (m - 5) \quad e$$

$$b = 1 + 9(m - 5)$$

$$c = 2 - 1 + 9 + 62 -$$

پس اگر یہ مساواتیں باثبات ہیں تو

$$0 = \begin{vmatrix} 2- & 0 & م-۵ \\ ۱ & م-۵ & ۰ \\ م-۱ & ۱ & ۲- \end{vmatrix}$$

جو پھیلائے پر

$$م (م-۵) (م-۱) = ۰ \quad \text{دیتا ہے۔}$$

مساواتوں کو م کی ان قیمتوں کے ساتھ حل کرنے سے

$$(i) \quad م = ۵ = ۶ = ۷ = \frac{۱۱}{۵} = ۰.۶۲ = ۰.۶۲ = \frac{۱}{۵} = ۰.۲ = ۰.۲$$

$$\text{اور } ۲- = \frac{۱}{۵} = \frac{۱}{۵}$$

$$(ii) \quad م = ۵ = ۶ = ۷ = \infty = ۰$$

اس سے ظاہر ہے $ی = ۰$

$\frac{۱}{۵}$ دریافت کرنے کے لیے مساوات $۲- = ۱ + ۱ + (م-۱) ی = ۰$ کو

ما پر تقسیم کرو۔ تب چونکہ $ی = ۰$ $\frac{۱}{۵} = ۰.۲$

$$(iii) \quad م = ۶ = ۷ = ۲- = ۰ \quad \text{اور } ۱ = \frac{۱}{۵} = ۰.۲$$

مثال (۸) عد کی ایسی قیمتیں دریافت کرو کہ نظام $۲ = ۱ + ۱ + ی = ۰$

$$م-۱ = م-۵ = ۲- = ۱ + ۱ + ی = ۰ \quad ۱۲۴ + ۱۲۸ + ۱۲۸ + ۱۲۸ + ۱۲۸ = ۹۶ = ۰$$

باثبات ہو۔

دی ہوئی مساواتوں کو معیاری شکل میں لکھنے سے

$$۲ = ۱ + ی - ۴ = ۰$$

$$۴ = ۲ - ۱ + ی = ۰$$

$$۵ = ۱ + ۱ + ی - ۶ = ۰$$

$$۱۲۴ + ۱۲۸ + ۱۲۸ + ۱۲۸ + ۱۲۸ = ۹۶ + ی = ۰$$

باثباتی کے لیے شرط ہے کہ $۰ = ق$ جس میں

۰	۱	۰	۰	=	۲	۱	۰	۲	=	ق
۱۲	۰	۴	۲		۲۰	۰	۴	۲		
۳	۲	۱	۱		۴	۲	۱	۵		
۳۸۲	۴	۱۲۸	۵۲-۱۲۲		۹۶	۴	۱۲۸	۱۲۲		
۴	۲	۲	۳	=	۴	۲	۱۲		=	
۱	۱	۱			۱	۱	۳			
۱۲۸	۴۲-۱۲۲	۱۲۸			۱۲۸	۴۲-۱۲۲	۳۸۲			
۴۲-۱۲۲	۱	۳۸۲	=	۴	۲	۲	۳	=		
۱۲۸	۱	۱۲۸			۱۲۸	۴۲-۱۲۲				

$$۴ = (۴-۳) (۳-۲) (۲-۱)$$

$$۸ یا ۱۲ = ۴ \times ۲ = ۴ \times ۳$$

یہ ملاحظہ ہو کہ ان میں سے ایک شرط غیر تابع نہیں ہے۔ کیونکہ وہ دوسروں سے مشتق ہوتی ہے جبکہ ابھی ابھی معین کی ہوئی دو قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت رکھتا ہے۔ چنانچہ $۸ = ۴ \times ۲$ اور پہلی اور دوسری مساواتوں کو ۳۱ اور ۱۶ سے علی الترتیب ضرب دیں اور جمع کریں تو حاصل مساوات

$$۱۸ + ۱۶ + ۶ + ۱۲ = ۴۲$$

ہوتی ہے۔ یہ چوتھی مساوات ہے، ۴ کی قیمت درج کرنے اور ایک سرے سے لے کر دوسرے سرے تک تمام کو ۸ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

باب (۳) کی مثالیں

مندرجہ ذیل مقطعات کی قیمتیں دریافت کرو:-

۴۶	۹۱	۳۱	(۲)	۲۶	۴	۱	(۱)
۳۰	۲۹	۱۳		۶۵	۹	۲	
۲۶	۳۶	۲۱		۱۲۵	۱۶	۳	

$$۱ + ۲ = ۳ \quad ۱ + ۳ = ۴$$

$$۲ + ۳ = ۵ \quad ۱ + ۴ = ۵$$

$$۲ + ۴ = ۶ \quad ۳ + ۳ = ۶$$

(۱۸) ثبات کرو کہ اگر

$$۱ + ۱ = ۲ \quad ۱ + ۲ = ۳$$

$$۱ + ۳ = ۴ \quad ۱ + ۴ = ۵$$

$$۱ + ۵ = ۶ \quad ۱ + ۶ = ۷$$

کا ایک مشترک حل ہے تو ہمیشہ ایسے تین عدد 'ل'، 'ک'، 'م' دریافت ہو سکتے ہیں کہ

$$۱ + ۱ = ۲ \quad ۱ + ۲ = ۳$$

$$۱ + ۳ = ۴ \quad ۱ + ۴ = ۵$$

$$۱ + ۵ = ۶ \quad ۱ + ۶ = ۷$$

چوتھا باب

مسئلہ قوت نما۔ لوکار تم اور لوکار تمی سلسلہ

۳۳۔ مسئلہ قوت نما۔ اگر $\frac{1}{n}$ عدد اکائی سے کم ہو تو $(\frac{1}{n} + 1)^n$ کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پیمائے گئے ہیں۔ اور

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^0$$

ہم اس کو اس طرح لکھ سکتے ہیں :-

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^0$$

۱ = ۱ لکھئے

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^0$$

لیکن $\left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n = \left\{ \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n \right\} - 1$ پس

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-1} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^{n-2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^0$$

قوت کے غیر متبائن ہونے کا ثبوت - اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ قوت $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$ جس میں m اور n دونوں صحیح عدد ہیں۔ پس چاہیے کہ

$$\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{1}{n^{m-1}} + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \dots$$

دونوں جانب n سے ضرب دو۔ تب سلسلہ کی تمام رقیں صحیح عدد بن جائیں گی
باستثناء

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{1}{n^{m-1}} + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \dots$$

پس ہمارے مفروضہ کے بموجب

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{1}{n^{m-1}} + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \dots$$

ایک صحیح عدد ہونا چاہیے۔ لیکن یہ محال جمع

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \dots + \frac{1}{n^{m-1}} + \frac{1}{n^m} + \frac{1}{n^{m+1}} + \frac{1}{n^{m+2}} + \dots$$

ہے اور اس لیے

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)$$

یعنی $\frac{1}{n}$ سے چھٹا ہے۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ
مقدار $\frac{1}{n}$ متوافق عدد $\frac{1}{m}$ کے مساوی نہیں ہو سکتی۔

۳۵۔ مسئلہ قوت نما کی بابت کوشی (Cauchy)

کا ثبوت - (مسئلہ ثنائی کو صرف مثبت صحیح قوت نما کی حد تک درست مان کر)

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \dots + \frac{1}{m^{m-1}} + \frac{1}{m^m} + \frac{1}{m^{m+1}} + \frac{1}{m^{m+2}} + \dots$$

فرض کرو کہ n (م) سلسلہ $m + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \frac{1}{m^4} + \dots + \frac{1}{m^{m-1}} + \frac{1}{m^m} + \frac{1}{m^{m+1}} + \frac{1}{m^{m+2}} + \dots$
کو تعبیر کرتا ہے۔

$$\text{پس ف (م)} = ۱ + م + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots + \frac{۱}{(م-۱)!} + \frac{۱}{م!}$$

$$\text{ف (ن)} = ۱ + ن + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots + \frac{۱}{(ن-۱)!} + \frac{۱}{ن!}$$

$$\text{اور ف (م+ن)} = ۱ + (م+ن) + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \dots + \frac{۱}{(م+ن-۱)!} + \frac{۱}{(م+ن)!}$$

اب 'ف (م) × ف (ن)' میں 'م' ن کا سر ہے $\frac{۱}{(م-۱)!}$ اور ف (م+ن) میں رقم 'م' ن کا

صرف $\frac{۱}{(م+ن)!}$ ہی میں واقع ہو سکتی ہے اور اس لیے اس کا سر $\frac{۱}{(م+ن)!}$ ہے

یعنی $\frac{۱}{(م+ن)!}$ ہو گا۔

پس چونکہ سلسلے ف (م)، ف (ن) اور ف (م+ن) 'م' اور 'ن' کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہیں اور کسی رقم 'م' ن کا سر ف (م) × ف (ن) میں وہی ہے جو ف (م+ن) میں ہے لہذا اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$\text{ف (م)} \times \text{ف (ن)} = \text{ف (م+ن)} \quad (۱)$$

م اور ن کی تمام قیمتوں کے لیے -
اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت صحیح عدد ہے۔ تب (۱) سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \text{ف (۱)} \times \dots \times \text{ف (۱)} = \text{ف (۱+۱+۱+... لا رقموں تک)}$$

$$\therefore \text{ف (۱)}^{\text{لا}} = \text{ف (لا)} \quad (۲)$$

اب فرض کرو کہ لا ایک مثبت کسر ہے جس میں پ اور ق مثبت صحیح اعداد ہیں۔ تب (۱) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\left\{ \text{ف} \left(\frac{1}{2} \right) \right\}^n = \text{ف} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\text{ف} \left(\frac{1}{2} \right)}{2} + \frac{\text{ف} \left(\frac{1}{2} \right)}{4} + \dots + \text{ق ر قوں تک} = \text{ف} (پ)$$

$$= \text{ف} (۱) \left\{ \frac{1}{2} \right\}^n \text{ از روئے (۲)}$$

$$\therefore \text{ف} \left(\frac{1}{2} \right) = \text{ف} (۱) \left\{ \frac{1}{2} \right\}^n$$

لہذا لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے $\{ \text{ف} (۱) \}^n = \text{ف} (لا)$
 آخر میں فرض کرو کہ لائنسی ہے اور - ما کے مساوی ہے پس ما خود
 مثبت ہے۔ تب $\text{ف} (-ما) \times \text{ف} (ما) = \text{ف} (۰)$ از روئے (۱) لیکن $\text{ف} = ۱$ اس لیے
 $\text{ف} (-ما) = \frac{1}{\text{ف} (ما)}$

پس $\text{ف} (لا) = \text{ف} (-ما) = \frac{1}{\text{ف} (ما)} = \frac{1}{\{ \text{ف} (۱) \}^n}$ اس لیے کہ ما مثبت ہے۔

$$\{ \text{ف} (۱) \}^n = \frac{1}{\text{ف} (لا)}$$

پس لا خواہ کچھ ہی ہو $\{ \text{ف} (۱) \}^n = \text{ف} (لا)$
 لیکن $\text{ف} (۱) = ۱ + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$
 $\therefore \text{ف} (لا) = ۱ + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$
 ۳۵۔ ثابت کرو کہ

$$ن \cdot ن (ن-۱) + \frac{ن (ن+۱) (۲-ن)}{2} - \dots = ن$$

سابقہ فصل سے، $(ن-۱) = (۱-ن) = (۱+لا) = \left(۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$

اور مسئلہ ثنائی سے، $(ن-۱) = (۱-ن) = (۱+لا) = \left(۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$
 اب لا کا سر (لا) $\left(۱ + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right)$ میں صفر ہے اگر ن سے ر کم ہے

اور ۱ ہے اگر $r = n$

اور لا کا سر $n - n = 0$ اور $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ ہے

$$\frac{1}{2} \left\{ n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - (n-2) \dots \right\}$$

پس $(n-1)$ کے دونوں جملوں کے پھیلاؤ میں لا کے سر n کو باہم دیگر مساوی

$$\frac{1}{2} \left\{ n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - (n-2) \dots \right\} = 1$$

اس مسئلہ کو حسب ذیل طریقہ پر عمومیت دی جاسکتی ہے :

$$\text{چونکہ } (n-1) = n - 1 \text{ اور } (n-1) = n - 1 \text{ اور } (n-1) = n - 1$$

$$\text{اور } (n-1) = n - 1 \text{ اور } (n-1) = n - 1$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - (n-2) \dots \right\}$$

پس $(n-1) = n - 1$ کے لیے دو جملے جو لکھے گئے ہیں ان میں لا کے سر n کو باہم دیگر مساوی کھینے سے

$$\frac{1}{2} \left\{ n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - (n-2) \dots \right\}$$

$$= (n-1)$$

اگر ہم $n = 1$ لکھیں اور $b = 1$ ، تو آخر الذکر نتیجہ ذیل کی شکل اختیار کرتا ہے :

$$n - n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} - (n-2) \dots = 1$$

مجھذا اگر ک کوئی مثبت صحیح عدد n سے کم ہو تو

لاک۔ n - $(1 + 1)k + \frac{n(n-1)}{2} (1 + 1)k - \dots - n + 1$ رقموں تک = ۰
مندرجہ ذیل خاص صورتیں اہمیت رکھتی ہیں، یہہ فرض کیا جاتا ہے کہ k ،
 n سے کم ہے۔

$$اک۔ n - 2k + \frac{n(n-1)}{2} 3k - \dots - n + 1 \text{ رقموں تک} = ۰$$

$$\text{اور } کم۔ n - (m-1)k + \frac{n(n-1)}{2} (m-2)k - \dots - n + 1 \text{ رقموں تک} = ۰$$

مشق ۴ (۱)

(۱) جب n لاتنا ہی ہو تو ثابت کرو کہ $(1 + \frac{1}{n})^n$ کی انتہا ۲ ہے

(۲) جب n لاتنا ہی ہو تو بتاؤ کہ $(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ کی انتہا ۱ ہے

$$(۳) \text{ ثابت کرو کہ } n^{14} - n^{13} + \frac{n(n-1)}{2} 14n^{12} - \dots - 14n + 1 = ۰$$

$$(۴) \text{ بتاؤ کہ } (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots) (1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \dots) = ۱$$

$$(۵) \text{ ثابت کرو کہ } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots = ۱$$

$$(۶) \text{ بتاؤ کہ } (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots) + 1 = (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots)^2$$

$$(۷) \text{ بتاؤ کہ } \frac{1}{1+2} = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{3+4} + \dots$$

لوکار تم

۳۶۔ ایک عدد کے مساوی بنانے کے لیے کسی دوسرے عدد کو جس قوت تک بلند کرنا چاہیے اُس کے قوت نما کو پہلے عدد کا لوکار تم کہتے ہیں بلحاظ دوسرے عدد کے جو کہ اس لوکار تم کا اساس کہلاتا ہے۔ مثلاً اگر $۱۰^۲ = ۱۰۰$ تو لا، ۱۰ کا لوکار تم با اساس ۱۰ کہلاتا ہے اور اس امر کا اظہار بطریق کتابت

لا = لوکر ما سے ہوتا ہے۔

ہم اب لوکارتموں کے چند اساسی خواص بیان کریں گے اور ان کے دریافت کرنے کے طریقے اور ان کے ذریعہ بعض تقریبی حسابات کا مختصر عمل بتائیں گے۔
لوکارتموں کے خواص سے طالب علم کو یقیناً انٹر میڈیٹ کے نصاب علم خلش کی تکمیل میں اچھی واقفیت ہوگئی ہوگی۔ سہولت کی خاطر یہ خواص یہاں بیان کر دیے جاتے ہیں :

(۱) اساس خواہ کچھ ہی ہو ا کا لوکارتم صفر ہے۔

(۲) کسی حامل ضرب کا لوکارتم اس کے اجزائے ضربی کے لوکارتموں کا حامل جمع ہے۔

مثلاً لوکر (لا ما می) = لوکر لا + لوکر ما + لوکر می +
(۳) کسی خارج قیمت کا لوکارتم مقسوم اور مقسوم علیہ کے لوکارتموں کا جبری تفاوت ہے۔

مثلاً لوکر $\frac{لا}{ما}$ = لوکر لا - لوکر ما
(۴) کسی عدد کی کسی قوت کا لوکارتم اس عدد کے لوکارتم اور اس قوت کے قوت نما کا حامل ضرب ہے۔

مثلاً لوکر لان = ن لوکر لا
(۵) کسی عدد کا لوکارتم باساس ۱ اگر معلوم ہو تو اس کا لوکارتم باساس ب معلومہ لوکارتم کو مستقل لوکر ۱ کے ساتھ ضرب دینے سے معلوم ہو جاتا ہے۔

مثلاً لوکر لا = لوکر لا × لوکر ۱ اور لوکر ۱ × لوکر ب = ۱
۳۔ لوکارتمی سلسلہ۔ فرض کرو کہ ۱ = لوکر

پس ک = لوکر ۱ - تب

۱ = لوکر ۱ = ۱ - پس

$$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

تب

$$(1+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

اب بشرطیکہ 'ا' عدداً اکائی سے کم ہو، '(1+1)' کو مسئلہ ثنائی کے ذریعہ پھیلا سکتے ہیں۔ تب

$$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

بائیں جانب کا سلسلہ 'ا' اور ماکی سب قیمتوں کے لیے مستحق ہے اور
 سیدھے جانب کا سلسلہ 'ا' کی سب قیمتوں کے لیے مستحق ہے، بشرطیکہ 'ا' کی
 قیمت عدداً اکائی سے کم ہو۔ پس ماکی ایسی قیمتوں کے لیے ہم مساوات کے
 دونوں جانب کے 'ا' کے اسروں کو باہم دیگر مساوی کھ سکتے ہیں اس طرح ہمیں
 حاصل ہوتی ہے مساوات

$$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

یہ لوکار قی سلسلہ کہلاتا ہے۔

۳۸۔ کسی عدد کے لوکار قی کی تقریبی قیمت معلوم کرنے میں جو سخت اٹھانی
 ہوتی ہے اس کو گھٹانے کے لیے اساسی لوکار قی سلسلہ سے اس سے زیادہ عسرت
 کے مستحق سلسلے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$(1) \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots$$

لوکار قی سلسلہ 'ا' = (1+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots

میں ماکی علامت کو تبدیل کرنے سے سلسلہ

$$(2) \dots - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+2}} - \dots$$

برآمد ہوتا ہے

$$\text{پس لوکر } \frac{1+1}{1-1} = \text{لوکر } (1+1) - \text{لوکر } (1-1) \\ (2) \dots\dots\dots \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + 1 \right) 2 =$$

$$\frac{1+1}{1-1} \text{ کے بجائے } \frac{2}{1} \text{ لکھو اور اس لیے } 1 \text{ کے بجائے } \frac{2}{1} \text{ تب}$$

$$\text{لوکر } \frac{2}{1} = \left\{ \frac{2}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right\} 2 = \dots\dots\dots (2)$$

اس سے اب ہم بغیر بہت زیادہ مشقت کے، تو کے اساس پر لوکار تم محسوب کر سکتے ہیں۔ بطور مثال:

ضابطہ (۴) میں $m = 2$ اور $n = 1$ لکھو۔ تب

$$\text{لوکر } 2 = 2 \left\{ \dots\dots\dots + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots\dots\dots \right\}$$

جس سے لوکر ۲ کی قیمت $\dots\dots\dots = 0.693147$ ۔ آسانی محسوب ہو جاتی ہے۔

لوکر ۲ معلوم کر لینے کے بعد ضابطہ (۴) سے لوکر ۳ کی قیمت اس طرح دریافت ہو سکتی ہے۔

$$\text{لوکر } 3 = 3 \left\{ \dots\dots\dots + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \dots\dots\dots \right\}$$

$$= 0.477121 \dots\dots\dots$$

پس لوکر ۳ $= 0.693147 + 0.477121 = 1.170268$ ۔ اس طریقہ پر عمل کرنے سے تو کے اساس پر کسی عدد کا لوکار تم بھی جس تقریبی درجہ تک دریافت کرنا مقصود ہو، دریافت ہو سکتا ہے۔

۳۹۔ تو کے اساس پر جو لوکار تم محسوب کیے جاتے ہیں نیپیری یا طبعی لوکار تم کہلاتے ہیں۔

تمام نظری تحقیقاتوں میں نیپیری لوکار تم استعمال کیے جلتے ہیں۔ لیکن

جب لوکارتموں کے ذریعہ تقریبی عددی حسابات عمل میں آتے ہیں تو بعض درجہ کے لحاظ سے جن کا عنقریب ذکر آئیگا ہمیشہ ۱۰ کے اساس والے لوکارتم استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس لیے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم معمولی لوکارتم کہلاتے ہیں۔

ہم نے ابھی بتایا ہے کہ ۱۰ کے اساس والے لوکارتم کس طرح دریافت کیے جاسکتے ہیں۔ جب تو ۱۰ کے اساس کے لوکارتم معلوم ہو جاتے ہیں تو ان کو مستقل جزو ضربی لوکارتم یا ۱۰ کے ضرب دینے سے ۱۰ کے اساس والے لوکارتم حاصل ہوتے ہیں۔ یہ مستقل جزو ضربی مقیاس (Modulus) کہلاتا ہے۔ اس کی قیمت ۲۳۳۲۹۰۰۰ ہے۔

سوالات ۷ (۱)

ثابت کرو کہ :

$$(۱) \text{ لوک } (۱ + n) = \text{لوک } ۱ + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n}) + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n+1}) + \dots + \text{لوک } (1 + \frac{1}{n+n-1})$$

$$(۲) \text{ لوک } ۱۲ = ۱ + \frac{1}{۲} (\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳}) + \frac{1}{۳} (\frac{1}{۳} + \frac{1}{۴}) + \frac{1}{۴} (\frac{1}{۴} + \frac{1}{۵}) + \dots + \frac{1}{۱۱} (\frac{1}{۱۱} + \frac{1}{۱۲})$$

$$(۳) \text{ لوک } ۱۰ = ۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \frac{1}{۶} + \frac{1}{۷} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۹} + \frac{1}{۱۰} + \dots$$

$$(۴) \text{ لوک } ۲ = \frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} + \frac{1}{۶} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۸} - \frac{1}{۹} + \frac{1}{۱۰} - \frac{1}{۱۱} + \frac{1}{۱۲} - \dots$$

$$(۵) \text{ لوک } ۲ = \frac{1}{۲} - \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} - \frac{1}{۵} + \frac{1}{۶} - \frac{1}{۷} + \frac{1}{۸} - \frac{1}{۹} + \frac{1}{۱۰} - \frac{1}{۱۱} + \frac{1}{۱۲} - \dots$$

$$(۶) \text{ لوک } ۱۰ = \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \frac{1}{۶} + \frac{1}{۷} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۹} + \frac{1}{۱۰} + \dots$$

$$(۷) \text{ لوگ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۸) \text{ لوگ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۹) \text{ لوگ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۱۰) \text{ لوگ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۱۱) \text{ اگر لوگ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۱۲) \text{ متناظر } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۱۳) \text{ چون } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$\text{اس کے ذریعہ سے سلسلوں } ۱ + \frac{1}{۱۱} + \frac{1}{۱۱^۲} + \frac{1}{۱۱^۳} + \dots \text{ اور } ۱ + \frac{1}{۱۱} + \frac{1}{۱۱^۲} + \frac{1}{۱۱^۳} + \dots$$

$$(۱۴) \text{ چونکہ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$\text{کر } \frac{1}{۱۱} = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$\text{پس } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

$$(۱۵) \text{ سلسلہ } ۱ + \frac{1}{۱۱} + \frac{1}{۱۱^۲} + \frac{1}{۱۱^۳} + \dots \text{ کے } n \text{ رقموں کا حاصل جمع}$$

$$(۱ + n) \text{ میں رقم سے اگر آغاز کیا جائے تو لوگ } ۱۱ \text{ کے مساوی ہوتا ہے}$$

$$\text{جبکہ } n \text{ بڑھایا جاتا ہے۔}$$

$$(۱۶) \text{ لوگ } ۱۱ = \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \frac{1-11}{1+11} + \dots$$

عام لوکار تم

۴۰۔ حسابی عمل اساس ۱۰ کے لوکارتموں کے ذریعہ بہت آسان ہو جاتا ہے۔ ذیل کی بحث میں لوکارتموں کا اساس اگر محذوف ہو تو سمجھنا چاہیے کہ وہ ۱۰ ہی ہے۔

اگر دو عددوں کی رقمیں (Figures) ایک ہی ہوں اور ان کا توازن بھی ایک ہی ہو لیکن فرق صرف نشان اعشاریہ کے مقام میں ہو تو واضح ہے کہ ایک عدد دوسرے عدد کو ۱۰ کی کسی صحیح قوت سے ضرب دینے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ پس ان عددوں کے لوکارتموں میں صرف ایک صحیح عدد کا تفاوت ہوگا۔

مثلاً لوک ۷۴۲۱۹۸ = لوک ۷۴۲۹۸ + لوک ۱۰۰ = ۲ + لوک ۷۴۲۹۸
 $2 + 258409661 = 258409663$ اعشاریہ کے ساتھ مقاموں تک۔
 اسی طرح چونکہ لوک ۲ = ۰.۳۰۱۰۳ اعشاریہ کے ۵ مقاموں تک تو
 لوک ۰.۰۰۲ = لوک (۲ ÷ ۱۰۰) = لوک ۲ - لوک ۱۰۰ = ۰.۳۰۱۰۳ - ۳ =
 مصرعہ بالا خواص کی وجہ سے عام (یعنی ۱۰ کے اساس والے) لوکارتم ہمیشہ
 اعشاریہ کے حصہ کو مثبت قائم رکھ کر لکھے جاتے ہیں۔ چنانچہ لوک ۰.۰۰۲
 کی قیمت ۳.۳۰۱۰۳ لکھی جاتی ہے یعنی اعشاریہ سے پہلے کا جزو ۳ ہے
 اس پر ایک چھوٹا سا خط کھینچا جاتا ہے تاکہ صرف وہی مننی بتایا جائے۔
 اسی طرز کتابت میں لوکارتم کا اعشاریہ والا مثبت حصہ اعشاریہ لوکارتمی
 (Mantissa) کہلاتا ہے۔ اور اس کا صحیح حصہ خواہ مثبت ہو یا منفی
 لوکارتم کا ہیئر کہلاتا ہے۔

۴۱۔ کسی بھی عدد کے لوکارتم کا میز محض اس عدد کے معائنہ سے
 معلوم ہو جاتا ہے۔ اس لیے کہ اگر کوئی عدد ایک سے بڑا ہو اور اس کے
 صحیح حصہ میں رقموں کی تعداد ن ہو تو واضح ہے کہ وہ عدد ۱۰ سے چھوٹا
 اور ۱۰ⁿ سے بڑا ہے۔ پس اس کا لوکارتم n اور n-1 کے مابین ہوگا

یعنی یہ لوکارتم ن - ۱ + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔

بناء پر ایک سے بڑے کسی بھی عدد کے لوکارتم کا صمٹن اس عدد کے صحیح حصہ کی رقموں کی تعداد سے ایک کم ہوگا۔

اگر دیا ہوا عدد ایک سے کم یعنی صرف اعشاریہ ہی پر مشتمل ہو اور اس کی سب سے پہلی ملحوظ رقم کے آگے ن صفر ہوں تو دیا ہوا عدد ۱۰^{-۱} سے بڑا مگر ۱۰^{-۲} سے چھوٹا ہوگا۔ پس چونکہ لوکارتم کا اعشاریہ والا حصہ ہمیشہ مثبت رہنا چاہیے اس عدد کا لوکارتم - (ن + ۱) + ایک اعشاریہ رقم ہوگا۔

پس اگر کوئی عدد ایک سے کم ہو اور اعشاریہ کی شکل میں لکھا گیا ہو تو اس کے لوکارتم کا صمٹن منفی اور دیے ہوئے عدد کی پہلی ملحوظ رقم سے پہلے لکھے ہوئے صفروں کی تعداد سے ایک زیادہ ہوگا۔

مثلاً ۱، ۲، ۳ کے لوکارتم کا صمٹن ۳ اور ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ کا صمٹن ۴ ہے۔
۴۴ - کسی دیے ہوئے عدد کے لوکارتم کی تعیین متناسب تفاوتوں کے اصول کے ذریعہ۔

اگر کسی عدد کی ملحوظ رقموں کی تعداد، لوکارتموں کی جدول میں دیے ہوئے عددوں کی رقموں کی تعداد سے زیادہ ہو اور جدول کے دو متواتر عددوں کا تفاوت ان ہر دو عددوں کے تفاوت کے مقابلہ میں چھوٹا ہو تو ان عددوں کے لوکارتموں کا تفاوت خود ان کے تفاوت کے متناسب ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\text{لوکم (ن + ۱) - لوکم ن = لوکم (۱ + \frac{1}{n}) = متن لوکم (۱ + \frac{1}{n})}$$

$$= متن (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} + \dots) = متن \frac{1}{n} تقریباً جبکہ \frac{1}{n} بہت چھوٹا ہوتا ہے۔ متن سے مراد مقياس میں ہے۔$$

طالب علم کو لوکارتمی جدولوں سے استفادہ کرنے میں کافی مشق ہوگی۔

اس لیے عملی کام میں مزید ہدایات کی ضرورت نہیں سمجھی گئی۔

سود مرکب اور سالیانے

۴۴۔ سود مرکب اور سالیانوں کے تمام سوالات مندرجہ ذیل تین سوالوں کے تابع ہیں:-

(۱) ایک مقررہ تعداد سال کے لیے ایک مقررہ شرح سود سے سود مرکب پر قرض دیے ہوئے روپیہ کے کل زر کی تعیین۔

فرض کرو کہ اصل رقم پ، تعداد سال ن، شرح سود فی صد فی سال ۱۰۰ ر ہے اور مطلوبہ کل زر ر ہے۔

تب پ کا سود ایک سال کے لیے پ ر ہے اور پہلے سال کے ختم پر کل زر یعنی اصل مع سود پ (۱+ر) ہے۔ اب دوسرے سال اس روپیہ کو اصل مان کر سود محسوب کیا جاتا ہے۔ پس دوسرے سال کے ختم پر کل زر $\{پ (۱+ر) (۱+ر)\} = پ (۱+ر)^۲$ ہوگا۔ اسی طرح ن سالوں کے ختم پر کل زر پ (۱+ر)^ن ہوگا۔

یعنی ر = پ (۱+ر)^ن

اور لوگ ر = لوگ پ + ن لوگ (۱+ر)

اگر سود نصف نصف سال کے ختم پر محسوب ہو کر اصل میں جمع کیا جاتا ہے تو واضح ہے کہ ن سال کا کل زر آپ (۱+ $\frac{ر}{۲}$)^{۲ن} ہوگا۔

(۲) کسی ایسے روپیہ کی حاضری قیمت کی تعیین جس ایک مقررہ شرح

سود مرکب سے ایک مقررہ مدت کے بعد واجب الادا ہے۔

فرض کرو کہ ر روپیہ ن سال کے بعد واجب الادا ہے اور شرح سود ۱۰۰ ر

فی صد فی سال فرض کر کے پ اس کی حاضری قیمت ہے تو پ روپیہ ن سال میں ۱۰۰ فی صد فی سال کی شرح سے کل زر ر ہو جانا چاہیے۔ پس سوال (۱) کی رو

$$پ = ر (۱+ر)^{-ن}$$

(۳) ن متواتر سال تک ہر سال کے ختم پر اپنی پنڈ واجب الادا سالیانہ کی حاضریہ قیمت کی تعیین۔

اگر سود کی شرح ۱۰۰ ر فی صد فی سال فرض کی جائے تو از روئے سوال (۲) پہلے سال کے ختم پر اداشدنی روپیہ کی حاضریہ قیمت $(1+r)^1$ ہے
دوسرے $(1+r)^2$ ہے
.....
.....

ن۔ ویں $(1+r)^n$ ہے
پس تمام روپیہ کی حاضریہ قیمت

$$1 \left\{ \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots + \frac{1}{(1+r)^n} \right\} = \frac{1}{r} \left\{ 1 - \frac{1}{(1+r)^n} \right\}$$
 ہے
مثال۔ ۲۰ سال تک ۳۰ پونڈ سالیانہ کی حاضریہ قیمت دریافت کرو
جبکہ سود کی شرح ۲ فی صد فی سال ہے۔

یہاں $1 = 30$ ، $n = 20$ ، $r = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$
پس حاضریہ قیمت $= 30 \times \left\{ 1 - \left(\frac{25}{29} \right)^{20} \right\}$
لوک $\left(\frac{25}{29} \right)^{20} = 20 \times \left\{ \text{لوک } \frac{25}{29} - \text{لوک } 20 \right\}$

$= 20 \times \{ 1.5149633 - 1.5396940 \}$
 $= 20 \times (-0.0247307) = -0.494614$
 $= \text{لوک } 20 \times 1.5396940 - 0.494614$
پس مطلوبہ حاضریہ قیمت $= 30 \times 25 \times (-1) - 0.494614 = -7500.494614$ پونڈ

سوالات نمبر (ب)
(لوکارتمی جدولیں استعمال کی جائیں)

(۱) ۵۰ سال میں ۱۰۰ پونڈ کا کل زرہ فی صد فی سال شرح سود کے حساب سے دریافت کرو۔

- ل (۲) ثابت کرو کہ ۱۵ سال میں ۵ فی صد فی سال شرح سود پر اور ۱۸ سال میں ۴ فی صد فی سال شرح سود پر روپیہ اپنے دو چند سے زیادہ ہو جاتا ہے۔
- (۳) ۱۰ سال تک اگر سود نصف نصف سال پر ۴ فی صد فی سال کی شرح سے جمع کیا جائے تو ۵۰۰ پونڈ کا کل زر کیا ہوگا؟
- (۴) ایک ملک میں ہر سال کے آغاز پر سالانہ ولادت کی شرح ۵ فی ہزار نفر آبادی ہے اور اموات کی شرح سالانہ ۵۲ فی ہزار نفر ہے۔ ثابت کرو کہ ۲۲ سال میں آبادی دو چند سے زیادہ ہو جائیگی۔
- (۵) ایک شخص سیونگزن بنک میں جو تمام قسم کی امانتی رقموں پر ۲½ فی صد سالانہ منافع دیتا ہے ۳۰ پونڈ داخل کرتا ہے۔ ۲۰ برس کے بعد اس کا کل زر کیا ہوگا؟
- (۶) ۴ فی صد سالانہ کی شرح سود پر ہر سال ۱۰۰ پونڈ سالیانہ ۴۴ سال تک حاصل کرنے کے لیے کس قدر روپیہ داخل کرنے کی ضرورت ہوگی؟
- (۷) ایک مجلس ۳۰۰۰۰ پونڈ ۳۰ مسادی سالانہ قسطوں میں ادا کرنے کے وعدہ سے قرض لیتی ہے۔ اگر بازار میں منافع کی شرح ۴ فی صد سالانہ ہے تو دریافت کرو کہ ہر سال کس قدر روپیہ ادا کیا جانا چاہیے۔

(علم مسئلہ)

پانچواں باب

ڈی مؤاور کا مسئلہ اور اس کے استعمال

۴۴ - ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے (جم طہ + خ جب طہ) کی قیمت یا اس کی قیمتوں میں سے ایک قیمت جم ن طہ + خ جب ن طہ ہے۔
اس مسئلہ کو ڈی مؤاور کا مسئلہ کہتے ہیں۔ اس کو ثابت کرنے سے پہلے ہم یہ ثابت کرینگے کہ

(جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ) ن اجزائے ضربی
= جم (طہ + طہ + + طہ) + خ جب (طہ + طہ + + طہ)
چونکہ (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ)
= جم طہ جم طہ + خ (جب طہ جم طہ + جم طہ جب طہ) - جب طہ جب طہ
= جم (طہ + طہ) + خ جب (طہ + طہ)
یعنی دراصل لیکہ ن = ۲ مسئلہ مصرعہ بالا درست ہے۔

اگر ہم تین اجزائے ضربی لیں تو

(جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ) (جم طہ + خ جب طہ)
= {جم (طہ + طہ) + خ جب (طہ + طہ)} {جم طہ + خ جب طہ}
= جم (طہ + طہ + طہ) + خ جب (طہ + طہ + طہ)
پس مسئلہ بالان = ۳ کے لیے بھی درست ہے۔

اس طرح عمل پیرا ہونے سے معلوم ہو گا کہ یہ مسئلہ بہ حیثیت عمومی کسی بھی مثبت صحیح عدد کے لیے درست ہے۔ [اس مسئلہ کے ذریعہ ہم

ان زاویوں کے مجموعہ کی جیوب التمام یا جیوب کو ان زاویوں کی نسبتوں کی رقوموں میں ظاہر کر سکتے ہیں - چونکہ

حجم (ط_۱ + ط_۲ + + ط_ن) + (خ جب (ط_۱ + ط_۲ + + ط_ن))
 = (حجم ط_۱ + خ جب ط_۱) (حجم ط_۲ + خ جب ط_۲) (حجم ط_ن + خ جب ط_ن)
 = حجم ط_۱ حجم ط_۲ حجم ط_ن (۱ + خ مس ط_۱) (۱ + خ مس ط_۲) (۱ + خ مس ط_ن)
 ∴ حجم (ط_۱ + ط_۲ + + ط_ن) = حجم ط_۱ حجم ط_۲ حجم ط_ن {۱ - ح_۱ - ح_۲ - - ح_ن}
 اور جب (ط_۱ + ط_۲ + + ط_ن) = حجم ط_۱ حجم ط_۲ حجم ط_ن {۱ - ح_۱ - ح_۲ - - ح_ن}
 جس میں ح_۱ = ماسوں کا حاصل جمع ہے، ایک ایک ماس کو فرداً فرداً لے کر۔
 ح_۲ = دو دو ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔
 ح_۳ = تین تین ماسوں کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع ہے۔
 اس سے براہ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$$\left[\frac{\dots - z + z - z}{\dots + z - z + z - z} = (م_1 + \dots + م_r + م_n) \right]$$

۴۵۔ ڈی مٹاؤر کے مسئلہ کا ثبوت جبکہ ن (۱) ایک مثبت صحیح عدد ہے، (۲) ایک منفی صحیح عدد ہے، (۳) ایک مثبت کسر ہے اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں، (۴) ایک منفی کسر۔ ف اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں، ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

واضح ہو کہ (۱) اور (۲) صورتوں میں (جم ط + خ جب ط) کی صرف ایک قیمت یعنی جم ن ط + خ جب ن ط ہوگی۔ (۳) اور (۴) صورتوں میں جملہ کی ق قیمتیں ہونگی جن کے مغلہ جم ن ط + خ جب ن ط ایک قیمت ہوگی۔ آگے چل کر بتایا جائیگا کہ بقیہ قیمتیں کیا ہونگی۔

صورت (۱)۔ جبکہ ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

سابقہ فصل میں ہم نے دیکھا ہے کہ (حجم طہ + خ جب طہ) (حجم طہ + خ جب طہ) (حجم طہ + خ جب طہ)

$$= \text{جم} (ط, ط + ط + \dots + ط) + \text{خ جب} (ط, ط + ط + \dots + ط) \\ ط = ط = \dots = ط = ط \text{ کھو۔ تب}$$

$$(\text{جم} ط + \text{خ جب} ط) = \text{جم} ن ط + \text{خ جب} ن ط$$

صورت (۲) — جبکہ ن ایک منفی صحیح عدد - م ہے جس میں م ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\text{چونکہ} (\text{جم} م ط + \text{خ جب} م ط) (\text{جم} م ط - \text{خ جب} م ط) = ۱$$

$$\text{پس } \text{جم} م ط - \text{خ جب} م ط = \frac{۱}{\text{جم} م ط + \text{خ جب} م ط}$$

$$= \frac{۱}{(\text{جم} ط + \text{خ جب} ط)} \text{ صورت (۱) سے}$$

$$\therefore \text{جم} (- م ط) + \text{خ جب} (- م ط) = (\text{جم} ط + \text{خ جب} ط) م$$

$$\therefore \text{جم} ن ط + \text{خ جب} ن ط = (\text{جم} ط + \text{خ جب} ط) ن$$

صورت (۳) — جبکہ ن کوئی مثبت کسر $\frac{ف}{ق}$ اس کی سب سے چھوٹی رقموں میں ہے، اور ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔

$$\text{چونکہ} (\text{جم} \frac{ف}{ق} ط + \text{خ جب} \frac{ف}{ق} ط) = \text{جم} ف ط + \text{خ جب} ف ط \text{ صورت (۱) سے۔}$$

$$(\text{جم} \frac{ف}{ق} ط + \text{خ جب} \frac{ف}{ق} ط) \text{ جملہ } (\text{جم} ف ط + \text{خ جب} ف ط) \text{ کی ق دیں}$$

اصولوں میں سے ایک اصل ہے۔

$$\therefore \text{جم} \frac{ف}{ق} ط + \text{خ جب} \frac{ف}{ق} ط \text{ جملہ } (\text{جم} ط + \text{خ جب} ط) \text{ کی ق - دیں}$$

اصولوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۱) کی رُو سے۔

$$\therefore \text{جم} \frac{ف}{ق} ط + \text{خ جب} \frac{ف}{ق} ط \text{ جملہ } (\text{جم} ط + \text{خ جب} ط) \frac{ق}{ق} \text{ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت ہے۔}$$

صورت (۴) — جبکہ ن = $-\frac{ف}{ق}$ اور ف اور ق مثل صورت (۳) کے ہیں۔

چونکہ $\{ \text{جم} (-\text{ف ط}) + \text{خ جب} (-\text{ف ط}) \}$ ق

= $\text{جم} (-\text{ف ط}) + \text{خ جب} (-\text{ف ط})$ صورت (۱) سے

$\text{جم} (-\text{ف ط}) + \text{خ جب} (-\text{ف ط})$ جملہ $\text{جم} (-\text{ف ط}) + \text{خ جب} (-\text{ف ط})$

کی ق۔ ویں اصولوں میں سے ایک اصل ہے۔

∴ $\text{جم} (-\text{ف ط}) + \text{خ جب} (-\text{ف ط})$ جملہ $\text{جم ط} + \text{خ جب ط}$ ق

کی ق۔ ویں اصولوں میں سے ایک اصل ہے، صورت (۲) سے۔

اس لیے $\text{جم ط} + \text{خ جب ط}$ کی قیمتوں میں سے ایک قیمت

$\text{جم} (-\text{ف ط}) + \text{خ جب} (-\text{ف ط})$ ہے۔

یہ مسئلہ ن کی غیر منطبق قیمتوں کے لیے بھی صادق آتا ہے اور اس طرح سے ن کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے صحیح ہے، لیکن اس کا باضابطہ ثبوت اس نصاب کے لیے غیر موزوں ہوگا۔

۴۶۔ اب ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ $\text{جم ط} + \text{خ جب ط}$ کی دوسری اور قیمتیں کیا ہیں جبکہ

$$ن = \pm \frac{ف}{ق}$$

چونکہ $\{ \text{جم} (\frac{ف}{ق} + \text{ف ط}) + \text{خ جب} (\frac{ف}{ق} + \text{ف ط}) \}$ ق

= $\text{جم} (\text{ف ط} + \frac{ف}{ق}) + \text{خ جب} (\text{ف ط} + \frac{ف}{ق})$

= $\text{جم ف ط} + \text{خ جب ف ط}$ جبکہ رکوائی سا صحیح عدد ہے۔

= $\text{جم ط} + \text{خ جب ط}$ ف

∴ $\text{جم ط} + \text{خ جب ط}$ کی ق قیمتوں میں سے

$\text{جم} (\frac{ف}{ق} + \text{ف ط}) + \text{خ جب} (\frac{ف}{ق} + \text{ف ط})$

اور اسی طرح $(\chi + \frac{3}{4})^2$ کی قیمت نکالو۔

$$\text{چونکہ } \chi + \frac{3}{4} = \left(\chi + \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\chi + \frac{3}{4}\right) \left(\chi + \frac{3}{4}\right) = \left(\chi + \frac{3}{4}\right) \left(\chi + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\chi + \frac{3}{4}\right) \left(\chi + \frac{3}{4}\right) = \left(\chi + \frac{3}{4}\right) \left(\chi + \frac{3}{4}\right)$$

$$= \left(\chi + \frac{3}{4}\right) \left(\chi + \frac{3}{4}\right) = \left(\chi + \frac{3}{4}\right) \left(\chi + \frac{3}{4}\right)$$

$$(2) \text{ ثابت کرو کہ اگر } \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{اور } \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب}$$

$$\text{تب } \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{اور } \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب}$$

$$\text{فرض کرو } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{تب } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{لیکن } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{چونکہ } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{لیکن } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{بھی علی الترتیب } \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{پس } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$2 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{مساوات } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\text{اور } \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب} = \text{جب} + \text{جب} + \text{جب}$$

$$(3) \text{ ثابت کرو کہ اگر } \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

$$(4) \text{ مثال } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\text{میں } 1 = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم} = \text{جم} + \text{جم} + \text{جم}$$

ثابت کرو کہ $\frac{\text{جب } (ط-ب) \text{ جب } (ط-ج)}{\text{جب } (ع-ب) \text{ جب } (ع-ج)} = \text{جب } ۲ \text{ (ط-ع) } = ۰$

ڈی مواور کے مسئلہ کے استعمالات

۴۔ جب $ن$ ط $ج$ $ن$ ط اور $مس$ $ن$ ط کا $ط$ کی نسبت
کی رقموں میں اظہار جبکہ $ن$ کوئی ثابت صحیح عدد ہے۔

چونکہ $(ج$ $ن$ ط $+ ن$ $ج$ $ن$ ط) = $(ج$ $ط$ $+ ن$ $ج$ $ط)$
آخر الذکر جملہ کو پھیلا کر متاثر کے حقیقی حصص کو ایک دوسرے کے مساوی
اور اسی طرح خیالی حصص کو باہمیگر مساوی لکھنے سے
 $ج$ $ن$ ط = $ج$ $ط$ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱}$ $ج$ $ن$ - $ط$ $ج$ $ن$ +
 $ج$ $ب$ $ن$ ط = $ج$ $ب$ $ط$ - $\frac{ن(۱-ن)(۱-ن)}{۳ \times ۲ \times ۱}$ $ج$ $ب$ $ن$ - $ط$ $ج$ $ب$ $ن$ +
 $ن$ $مس$ $ط$ - $\frac{ن(۱-ن)(۱-ن)}{۳ \times ۲ \times ۱}$ $مس$ $ط$ +
پس $مس$ $ن$ ط =

$$۱ - \frac{ن(۱-ن)}{۲ \times ۱} $مس$ $ط$ + \frac{ن(۱-ن)(۱-ن)(۱-ن)}{۳ \times ۲ \times ۱} $مس$ $ط$ + \dots$$

سوالات ۵ (ب)

- ثابت کرو کہ (۱) $ج$ ۴ $ط$ = $ج$ ۴ $ط$ - $ج$ ۶ $ط$ $ج$ ۲ $ط$ + $ج$ ۲ $ط$
(۲) $ج$ ۴ $ط$ = $ج$ ۴ $ط$ $ج$ ۲ $ط$ - $ج$ ۴ $ط$ $ج$ ۲ $ط$
(۳) $ج$ ۵ $ط$ = $ج$ ۵ $ط$ - $ج$ ۱۰ $ط$ $ج$ ۳ $ط$ + $ج$ ۵ $ط$ $ج$ ۲ $ط$
(۴) $ج$ ۵ $ط$ = $ج$ ۵ $ط$ $ج$ ۲ $ط$ - $ج$ ۱۰ $ط$ $ج$ ۳ $ط$ + $ج$ ۵ $ط$ $ج$ ۲ $ط$

$$(۵) \text{ جم } ۶ ط = \text{ جم } ۵ ط - \text{ جم } ۱ ط + \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط$$

$$(۶) \text{ جب } ۶ ط = \text{ جم } ۶ ط - \text{ جم } ۱ ط + \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط$$

$$(۷) \text{ مس } ۲ ط = \frac{\text{ مس } ۲ ط - \text{ مس } ۱ ط}{\text{ مس } ۱ ط + \text{ مس } ۱ ط}$$

$$(۸) \text{ مس } ۵ ط = \frac{\text{ مس } ۵ ط - \text{ مس } ۱ ط}{\text{ مس } ۱ ط + \text{ مس } ۱ ط}$$

(۹) اگر ن کوئی ایک طاق مثبت صحیح عدد ہے تو بتاؤ کہ مندرجہ ذیل (ن-۱) مقادیر

$$\text{مس } \frac{\pi}{n}, \text{ مس } \frac{\pi^2}{n}, \dots, \text{مس } \frac{\pi(n-1)}{n}$$

کے دو دو مقادیر کے حاصل ضربوں کا حاصل جمع $\frac{n(n-1)}{2}$ ہے۔

$$(۱۰) \text{ ثابت کرو کہ مس } \frac{\pi}{n} + \text{مس } \frac{\pi+1}{n} + \dots + \text{مس } \frac{\pi+(n-1)}{n} = \frac{n(n-1)}{2}$$

= ن م م یان مس ط بوجب اس کے کہ ن جفت عدد ہے یا طاق۔

۴۔ جب ن ط اور جم ن ط کے لیے جم ط یا جب ط کی نزولی

قوتوں کے سلسلوں میں جملے۔

سابقہ فصل کے نتائج پر غور کرنے سے واضح ہو گا کہ ن کوئی سا صحیح عدد ہو ہم جم ن ط کو جم ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلے میں ظاہر کر سکتے ہیں اس لیے کہ جم ن ط کے لیے جو جملہ لکھا جاتا ہے اس میں جب ط کی ساری قوتیں جفت ہیں۔

$$\text{مثلاً جم } ۳ ط = \text{ جم } ۳ ط - \text{ جم } ۱ ط + \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط$$

$$= \text{ جم } ۳ ط - \text{ جم } ۱ ط + \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط$$

$$= \text{ جم } ۳ ط - \text{ جم } ۱ ط + \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط$$

[واضح ہو کہ یہ نتیجہ ابتدائی علم مثلثات کا مشہور مضابطہ ہے اور بہت آسان طریقہ سے حاصل ہوتا ہے]

$$\text{جم } ۲ ط = \text{ جم } ۲ ط - \text{ جم } ۱ ط + \text{ جم } ۱ ط - \text{ جم } ۱ ط$$

$$= \text{جم}^۲ ط - ۶ \text{جم}^۲ ط (۱ - \text{جم}^۲ ط) + (۱ - \text{جم}^۲ ط)^۲$$

$$= ۸ \text{جم}^۲ ط - ۱۸ \text{جم}^۲ ط + ۱۸ \text{جم}^۲ ط - ۸ \text{جم}^۲ ط$$

معیناً اگر ن طاق عدد ہے تو $\frac{\text{جم}^۲ ن ط}{\text{جم}^۲ ط}$ کو جب ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً} \quad \frac{\text{جم}^۳ ط}{\text{جم}^۲ ط} = ۳ - ۳ \text{جم} ط + ۱$$

$$\frac{\text{جم}^۵ ط}{\text{جم}^۲ ط} = ۱۶ - ۱۲ \text{جم} ط + ۱$$

یہ واضح ہے کہ اگر ن طاق عدد ہے تو جب ن ط کو جب ط کی نزولی قوتوں کے محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً} \quad \text{جم} ۳ ط = ۳ - ۳ \text{جم} ط + ۳ \text{جم} ط$$

یہ بھی واضح ہے کہ اگر ن جفت عدد ہے تو $\frac{\text{جم}^۲ ن ط}{\text{جم}^۲ ط}$ کو بھی ایسے ہی محدود سلسلہ میں ظاہر کر سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً} \quad \frac{\text{جم} ۴ ط}{\text{جم} ط} = \frac{\text{جم} ۴ ط - ۴ \text{جم} ط + ۴ \text{جم} ط - ۴ \text{جم} ط}{\text{جم} ط}$$

$$= ۴ - ۴ \text{جم} ط + ۴ \text{جم} ط - ۴ \text{جم} ط$$

$$= ۴ - ۴ \text{جم} ط + ۴ \text{جم} ط - ۴ \text{جم} ط$$

$$= ۴ - ۴ \text{جم} ط + ۴ \text{جم} ط - ۴ \text{جم} ط$$

جم ن ط اور جب ن ط کو محض جم ط یا جب ط کی قوتوں کے سلسلوں میں عام طور پر پھیلا سکتے ہیں۔ لیکن ان کا باضابطہ ثبوت چونکہ اس نصاب سے بالا تر ہے اس لیے ہم صرف چند آسان مثالوں ہی پر اکتفا کرتے ہیں۔

سوالات ۵ (ج)

ثابت کرو۔ (۱) جم ۷ ط = ۶۲ جم ط - ۱۱۲ جم ط + ۵۶ جم ط - ۷ جم ط

$$\begin{aligned} (۲) \text{ جب } ۷ ط = ۷ ط - ۵۶ \text{ جب } ط + ۱۱۲ \text{ جب } ط - ۶۴ \text{ جب } ط \\ (۳) \text{ جم } ۸ ط = ۱۲۸ \text{ جم } ط - ۲۵۶ \text{ جم } ط + ۱۶۰ \text{ جم } ط - ۳۲ \text{ جم } ط + ۱ \\ (۴) \text{ جب } ۸ ط = \text{جب } ط (۱۲۸ \text{ جم } ط - ۱۹۲ \text{ جم } ط + ۸۰ \text{ جم } ط - ۸ \text{ جم } ط) \end{aligned}$$

۴۸۔ کسری زاویوں کی مثلثی نسبتیں۔

مثلثات کی ابتدائی کتاب میں طالب علم نے پڑھا ہوگا کہ جب ط دیا جاتا ہے تو جب ط کی چار ممکنہ قیمتیں ہوتی ہیں اور اسی طرح جم ط کی چار قیمتیں۔ اور جم ط دیا جاتا ہے تو جب ط کی دو ممکنہ قیمتیں ہوتی ہیں اور جم ط کی دو قیمتیں۔ سلسلہ مندرجہ فضل (۴۶) کے ذریعہ ہم زاویہ ط کے متعلق اس کے متشابہ معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{مساوات } \text{جم } ط = \text{جم } ط - \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{ جم } ط - \frac{۲ ط}{ن} \text{ جب } ط + \dots + (۱) \\ \text{پر غور کرو جو جم ط کے لیے جم } ط \text{ کی نزولی قوتوں میں ایک جملہ ہے۔} \\ \text{فرض کرو کہ جم ط معلوم ہے اور اس جیب التمام کا سب سے چھوٹا} \\ \text{ثبت زاویہ ع ہے۔} \end{aligned}$$

(۲ + ع) زاویوں کی جیب التمام بھی وہی ہوگی جو ع کی ہے، اگر ر کوئی سا مثبت صحیح عدد ہے۔

پس اگر ہم مساوات (۱) والے جملہ میں جم ط کے عوض $\frac{۲ ط}{ن} + \frac{۲ ط}{ن}$ قیمتوں میں سے کوئی ایک قیمت لکھیں تو ہمیں جم (۲ + ع) یا جم حاصل ہو جائیگی۔

پس جم $\frac{۲ ط}{ن} + \frac{۲ ط}{ن}$ جبکہ $۲، ۱، ۰، \dots، (ن-۱)$ جم ط کی ن۔ دیں درجہ کی مساوات کی شرط کو پورا کرتی ہے۔

$$\text{جم } ع = \text{جم } ط - \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} \text{ جم } ط - (۱ - \text{جم } ط) + \dots + (۲)$$

اگر ع صفر یا ۲ کی کوئی ضعف نہیں ہے تو آسانی سے بتایا جاسکتا ہے کہ

$$\text{جم } \frac{\pi}{n} \text{، جم } \frac{\pi^2 + \pi}{n} \text{، جم } \frac{\pi^2 + \pi}{n} \dots \dots \dots \text{جم } \frac{\pi(1-n)}{n} \dots \dots \dots (3)$$

سب ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور اس لیے وہ مساوات (۲) کی جو بلحاظ جم $\frac{\pi}{n}$ ایک مساوات ہے، n اصلیں ہیں۔

یہیں حالت اس مساوات کے ذریعہ جم $\frac{\pi}{n}$ ، جم $\frac{\pi^2 + \pi}{n}$ ،
جم $\frac{\pi(1+n)}{n}$ کے متشاکل تفاعل دریافت ہو سکتے ہیں۔

اس کے علی الرغم اگر π صفر یا π کی صنف ہے اور n کے ۲ تو مساوات (۲) کی اصلیں سب مختلف نہیں ہیں بلکہ دہرائی جاتی ہیں۔

۴۹۔ اگر ہم جم $\frac{\pi}{n}$ کو جب $\frac{\pi}{n}$ کی نزولی قوتوں کے سلسلہ میں ادا کریں جبکہ n جفت (بالفرض m^2) ہے تو ہمیں ایک ایسی مساوات ملتی ہے جس کی اصلیں مندرجہ ذیل m^2 جیبیں ہیں:-

$$\text{جب } \frac{\pi}{m^2} \text{، جب } \left(\frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi}{m^2} \right) \text{، جب } \left(\frac{\pi}{m^2} + \frac{\pi}{m^2} \right)$$

$$\dots \dots \dots \text{جب } \left(\frac{\pi(1-m^2)}{m^2} + \frac{\pi}{m^2} \right)$$

اسی طرح جب $\frac{\pi}{n}$ کو جب $\frac{\pi}{n}$ کی نزولی قوتوں میں پھیلاتے سے سبجالیکہ n طاق (بالفرض $m^2 + 1$) ہے، ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جس کی اصلیں مندرجہ ذیل $m^2 + 1$ جیبیں ہیں:-

$$\text{جب } \frac{\pi}{1+m^2} \text{، جب } \left(\frac{\pi}{1+m^2} + \frac{\pi}{1+m^2} \right) \dots \dots \dots \text{جب } \left(\frac{\pi m^2}{1+m^2} + \frac{\pi}{1+m^2} \right)$$

جم $\frac{\pi}{n}$ ، جب $\frac{\pi}{n}$ ، جب $\frac{\pi}{n}$ اور مس n ط کے پھیلاؤ بھی اسی طرح استعمال کیے جاسکتے ہیں جیسا کہ ذیل کے آخری چند سوالوں سے ظاہر ہوگا۔

سوالات ۵ (۵)

(۱) ثابت کرو کہ جم $\frac{\pi}{n}$ ، جم $\frac{\pi^2}{n}$ ، جم $\frac{\pi^2}{n}$ مساوات
۸ لا $2 + 2$ لا $2 - 1 = 0$ کی اصلیں ہیں۔

چونکہ $ج ۷ ط = ۶۴ ج ۵ ط - ۱۱۲ ج ۴ ط + ۵۶ ج ۳ ط - ۷ ج ۲ ط$
 $ج ۷ ط = ۱ اور ج ۵ ط = لا$ لکھنے سے

مسوات $۶۴ لا - ۱۱۲ لا^۲ + ۵۶ لا^۳ - ۷ لا^۴ = ۱ = ۰$
 کی اصلیں ۱، $ج ۲ ط$ ، $ج ۴ ط$ ، $ج ۶ ط$ $ج ۱۲ ط$ ہیں۔

معیناً $ج ۲ ط = ج ۴ ط = ج ۶ ط = ج ۸ ط = ج ۱۰ ط = ج ۱۲ ط$ اور $ج ۶ ط = ج ۸ ط = ج ۱۰ ط = ج ۱۲ ط$
 لیکن $۶۴ لا - ۱۱۲ لا^۲ + ۵۶ لا^۳ - ۷ لا^۴ = ۱ - لا = (۱ - لا)(۱ + لا - لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ - لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱} - لا^{۱۲})$
 پس مساوات $۸ لا^۳ + لا^۴ - لا^۵ - لا^۶ - لا^۷ - لا^۸ - لا^۹ - لا^{۱۰} - لا^{۱۱} - لا^{۱۲} = ۰$ کی اصلیں

$ج ۲ ط$ ، $ج ۴ ط$ اور $ج ۶ ط$ ہیں

(۲) ثابت کرو کہ ۱۶ ج ۷ ط ۱۶ ج ۵ ط ۱۶ ج ۳ ط ۱۶ ج ۱ ط = ۱ جس میں $ع = \frac{۲}{۹}$

(۳) ثابت کرو کہ ۸ جب $\frac{۲}{۲}$ جب $\frac{۲}{۲}$ جب $\frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$

چونکہ $ج ۷ ط = ۷ جب ط - ۵۶ جب ۳ ط + ۱۱۲ جب ۵ ط - ۶۴ جب ۷ ط$
 $ج ۷ ط = ۰$ لکھنے سے مساوات $۶۴ لا - ۱۱۲ لا^۲ + ۵۶ لا^۳ - ۷ لا^۴ = ۰$

کی اصلیں ۰، $\pm جب \frac{۲}{۲}$ ، $\pm جب \frac{۲}{۲}$ ، $\pm جب \frac{۲}{۲}$ ہوتی ہیں۔

پس $جب \frac{۲}{۲} جب \frac{۲}{۲} جب \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$

اور ۸ جب $\frac{۲}{۲}$ جب $\frac{۲}{۲}$ جب $\frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲}$

اس میں مثبت علامت لی گئی ہے اس لیے کہ حاصل ضرب مثبت ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ $مس \frac{۲}{۱۱} مس \frac{۲}{۱۱} مس \frac{۲}{۱۱} مس \frac{۲}{۱۱} مس \frac{۲}{۱۱} = مس \frac{۲}{۱۱}$

چونکہ $مس ۱ ط = \frac{۱۰ \times ۱۱}{۳ \times ۲ \times ۱} مس ۳ ط + \dots - مس ۱ ط$
 $۱ - \frac{۱۰ \times ۱۱}{۲ \times ۱} مس ۱ ط + \dots - مس ۱ ط$

اگر مس ۱۱ ط = ۰ لکھیں تو مساوات ۱۱ مس ط - $\frac{9 \times 10 \times 11}{3 \times 2 \times 1}$ مس ۳ ط + ... مس ۱۱ ط = ۰ کی اصلیں ۰، \pm مس $\frac{11}{2}$ ، \pm مس $\frac{11}{3}$ ، \pm مس $\frac{11}{4}$ ، \pm مس $\frac{11}{5}$ ، \pm مس $\frac{11}{6}$ ، \pm مس $\frac{11}{7}$ ، \pm مس $\frac{11}{8}$ ، \pm مس $\frac{11}{9}$ ، \pm مس $\frac{11}{10}$ ، \pm مس $\frac{11}{11}$ ہوتی ہیں۔

$$\therefore \text{مس } \frac{11}{1} \text{ مس } \frac{11}{2} \text{ مس } \frac{11}{3} \dots \text{مس } \frac{11}{11} = ۱۱$$

$$\text{پس مس } \frac{11}{1} \text{ مس } \frac{11}{2} \text{ مس } \frac{11}{3} \dots \text{مس } \frac{11}{11} = ۱۱$$

(۵) ثابت کرو کہ ۲ جم $\frac{11}{2}$ مساوات لا - لا - لا ۲ + ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ اور بقیہ اصلیں کیا ہیں بتاؤ۔

(۶) ثابت کرو کہ لا = ۲ جم $\frac{11}{2}$ مساوات لا - لا - لا ۶ + لا ۹ - ۱ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ بقیہ اصلیں بتائی جائیں۔

[ہدایت - جب ۹ ط کو جیب التمام کے سلسلہ میں پھیلادو اور

پھر جب ۹ ط = ۰]

(۷) ثابت کرو کہ مساوات لا - لا ۲۱ + لا ۳۵ - لا ۴۰ = ۰ کی اصلیں مس $\frac{11}{2}$ ، مس $\frac{11}{3}$ اور مس $\frac{11}{4}$ ہیں اور اس کی مدد سے بتاؤ کہ قسط $\frac{11}{2}$ + قسط $\frac{11}{3}$ + قسط $\frac{11}{4}$ = ۲۱۶

۵۰۔ جم ط کا انہار ط کے ضعفوں کی جیب التمام کے

سلسلہ میں جبکہ ط ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر ہم لکھیں جم ط + خ جب ط = لا

تو جم ط - خ جب ط = لا

اور جم ن ط + خ جب ن ط = لا، جم ن ط - خ جب ن ط = لا

پس ۲ جم ط = لا + لا اور ۲ خ جب ط = لا - لا
۲ جم ن ط = لا + لا اور ۲ خ جب ن ط = لا - لا

پس $\text{جم } n ط = {}^{1-n}_2 (جم ط - \frac{\pi}{n}) (جم ط - \frac{\pi^2}{n}) \dots (جم ط - \frac{\pi^{n-1}}{n})$ \times $(جم ط - \frac{\pi(1-n)}{n})$
 ہم ان کو از سر نو جوڑواں ترتیب دے کر لکھ سکتے ہیں، جبکہ n ایک طاق عدد ہے،

$$\text{جم } n ط = {}^{1-n}_2 (جم ط - \frac{\pi}{n}) (جم ط - \frac{\pi^2}{n}) \dots (جم ط - \frac{\pi^{n-1}}{n}) \dots \dots \dots (جم ط - \frac{\pi(1-n)}{n}) \times$$

اور اگر n ایک جفت عدد ہے تو

$$\text{جم } n ط = {}^{1-n}_2 (جم ط - \frac{\pi}{n}) (جم ط - \frac{\pi^2}{n}) \dots (جم ط - \frac{\pi^{n-1}}{n}) \dots \dots \dots (جم ط - \frac{\pi(1-n)}{n})$$

یعنی اس طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں:

$$\text{جم } n ط = {}^{1-n}_2 (جم ط - \frac{\pi}{n}) (جم ط - \frac{\pi^2}{n}) \dots (جم ط - \frac{\pi^{n-1}}{n}) \dots \dots \dots (جم ط - \frac{\pi(1-n)}{n}) \times$$

جبکہ n طاق عدد ہے۔

$$\text{اور جم } n ط = {}^{1-n}_2 (جم ط - \frac{\pi}{n}) (جم ط - \frac{\pi^2}{n}) \dots (جم ط - \frac{\pi^{n-1}}{n}) \dots \dots \dots (جم ط - \frac{\pi(1-n)}{n}) \times$$

جبکہ n جفت ہے
 اگر $\leftarrow 0$ تو

$$1 = \frac{\pi(1-n)}{n} \text{ جب } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2}{n} \dots \dots \dots \text{ جب } \frac{\pi(1-n)}{n} = 1$$

جبکہ n طاق عدد ہے۔

$$1 = \frac{\pi(1-n)}{n} \text{ اور } \frac{\pi(1-n)}{n} \text{ جب } \frac{\pi}{n} \text{ جب } \frac{\pi^2}{n} \dots \dots \dots \text{ جب } \frac{\pi(1-n)}{n} = 1$$

جبکہ n جفت عدد ہے۔

جذر المربع مثبت لیا جاتا ہے اس لیے $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{\pi^2}{4}$ ، سب $\frac{\pi}{2}$ سے کم تر ہیں۔
ان جملوں کو استعمال کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\frac{\text{جمن ط}}{\text{جمن ط}} = (1 - \frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi}{2}}) (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1) (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1) \dots (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1) (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1)$$

جبکہ ن طاق عدد ہے، اور

$$\text{جمن ط} = (1 - \frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi}{2}}) (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1) (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1) \dots (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1) (\frac{\text{جب ط}}{\frac{\pi^2}{4}} - 1)$$

جبکہ ن جفت عدد ہے۔

۵۲۔ جبن ط کے اجزائے ترکیبی کی تعیین۔

فصل (۴۶) میں ہم نے دیکھا تھا کہ $\frac{\text{جبن ط}}{\text{جب ط}} = \text{جمن ط}^1 - \frac{\text{ن} (1 - \text{ن}) (1 - \text{ن})}{3 \times 2 \times 1} \frac{\text{جب ط}}{\text{جمن ط}}$ اور سابقہ فصل میں جیسا کہ بتایا گیا تھا اسی طرح بتایا جاسکتا ہے کہ جب ط کے عوض
۱۔ جمن ط لکھنے سے جمن ط کا سر $1 - 2$ ہے۔

پس، مثل سابق، $\frac{\text{جبن ط}}{\text{جب ط}} = \text{جمن ط}^2 - \frac{\text{ن}^2}{2} (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2})$
ان کو از سر نو جوڑواں ترتیب دینے سے

$$\frac{\text{جبن ط}}{\text{جب ط}} = \text{جمن ط}^2 - \frac{\text{ن}^2}{2} (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2})$$

جبکہ ن جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جبن ط}}{\text{جب ط}} = \text{جمن ط}^2 - \frac{\text{ن}^2}{2} (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2})$$

جبکہ ن طاق عدد ہے۔

ان جملوں کو ہم بدل کر مکرر کر سکتے ہیں۔

$$\frac{\text{جبن ط}}{\text{جب ط}} = \text{جمن ط}^2 - \frac{\text{ن}^2}{2} (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) \dots (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2}) (\text{جمن ط} - \frac{\pi}{2})$$

جبکہ n جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } n \text{ ط}} = \frac{1}{2} \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \dots \dots \dots \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right)$$

جبکہ n طاق عدد ہے۔

$$\text{لیکن } \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } n \text{ ط}} = n \left(\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{n \text{ ط}} \right) \left(\frac{\text{ط}}{\text{جب } n \text{ ط}} \right)$$

$$\therefore \text{نہا } \left(\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{\text{جب } n \text{ ط}} \right) = n \text{ نہا } \left(\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{n \text{ ط}} \right) \left(\frac{\text{ط}}{\text{جب } n \text{ ط}} \right) = n \left(\frac{\text{ط}}{\text{جب } n \text{ ط}} \right)$$

اگر مندرجہ بالا نتیجوں میں $\text{ط} \leftarrow \text{ط}$ تو

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2} \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \dots \dots \dots \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right)$$

جبکہ n جفت عدد ہے، اور

$$\frac{n}{2} = \frac{1}{2} \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \dots \dots \dots \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right) \left(\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} - \text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط} \right)$$

جبکہ n طاق عدد ہے۔

جذر المربع کی علامت مثبت لی جاتی ہے اس لیے کہ تمام جمعیں مثبت ہیں۔

$$\text{پس } \frac{\text{جب } n \text{ ط}}{n \text{ جب } \text{ط}} = \text{جم } \text{ط} \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right) \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right) \dots \dots \dots \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right) \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right)$$

جبکہ n جفت عدد ہے، اور

$$\frac{\text{جب } n \text{ ط}}{n \text{ جب } \text{ط}} = \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right) \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right) \dots \dots \dots \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right) \left(\frac{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}}{\text{جب } \frac{n}{2} \text{ ط}} \right)$$

جبکہ n طاق عدد ہے۔

۵۳۔ اِکائی کی n اصلوں کی تعیین جبکہ n کوئی مثبت

صحیح عدد ہے۔ بالفاظ دیگر مسادات $1^n = 1$ کا مل۔

سوالات ۵ (۴۰)

(۱) مساوات لا^۳ = ر^۳ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{V}{V'}\right)^2 = 1$ لہذا $\frac{V}{V'} = 1$ = حجم $\frac{\pi R^2 L}{3} +$ خ جب $\frac{\pi R^2 L}{3}$ (جس میں $R=1$ ، $L=2$)

(۲) مساوات لاء $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ کو حل کرو۔

چونکہ $\left(\frac{u}{v}\right)^2 = 1$ لہذا $\frac{u}{v} = 1$ جم $\frac{\pi}{2}$ + خ جب $\frac{\pi}{2}$ (جس میں $r = r_1$)

$$= \text{جم} \frac{\pi}{r} \pm \text{خ جب} \frac{\pi}{r} \text{ (جس میں } r=1 \text{)} \quad (2)$$

(۳) ثابت کرو کہ اگر n ایک مفرد عدد ہے اور a اکائی کی خیالی n -ویں

اصلوں میں سے ایک اصل ہے تو بقیہ اصلیں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳، ۱۱۴، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۲۰، ۱۲۱، ۱۲۲، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۲۵، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۲۹، ۱۳۰، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۱، ۱۴۲، ۱۴۳، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۶۱، ۱۶۲، ۱۶۳، ۱۶۴، ۱۶۵، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۶۹، ۱۷۰، ۱۷۱، ۱۷۲، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۸۹، ۱۹۰، ۱۹۱، ۱۹۲، ۱۹۳، ۱۹۴، ۱۹۵، ۱۹۶، ۱۹۷، ۱۹۸، ۱۹۹، ۲۰۰، ۲۰۱، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۰۴، ۲۰۵، ۲۰۶، ۲۰۷، ۲۰۸، ۲۰۹، ۲۱۰، ۲۱۱، ۲۱۲، ۲۱۳، ۲۱۴، ۲۱۵، ۲۱۶، ۲۱۷، ۲۱۸، ۲۱۹، ۲۲۰، ۲۲۱، ۲۲۲، ۲۲۳، ۲۲۴، ۲۲۵، ۲۲۶، ۲۲۷، ۲۲۸، ۲۲۹، ۲۳۰، ۲۳۱، ۲۳۲، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵، ۲۳۶، ۲۳۷، ۲۳۸، ۲۳۹، ۲۴۰، ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۳، ۲۴۴، ۲۴۵، ۲۴۶، ۲۴۷، ۲۴۸، ۲۴۹، ۲۵۰، ۲۵۱، ۲۵۲، ۲۵۳، ۲۵۴، ۲۵۵، ۲۵۶، ۲۵۷، ۲۵۸، ۲۵۹، ۲۶۰، ۲۶۱، ۲۶۲، ۲۶۳، ۲۶۴، ۲۶۵، ۲۶۶، ۲۶۷، ۲۶۸، ۲۶۹، ۲۷۰، ۲۷۱، ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۴، ۲۷۵، ۲۷۶، ۲۷۷، ۲۷۸، ۲۷۹، ۲۸۰، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۸۳، ۲۸۴، ۲۸۵، ۲۸۶، ۲۸۷، ۲۸۸، ۲۸۹، ۲۹۰، ۲۹۱، ۲۹۲، ۲۹۳، ۲۹۴، ۲۹۵، ۲۹۶، ۲۹۷، ۲۹۸، ۲۹۹، ۳۰۰، ۳۰۱، ۳۰۲، ۳۰۳، ۳۰۴، ۳۰۵، ۳۰۶، ۳۰۷، ۳۰۸، ۳۰۹، ۳۱۰، ۳۱۱، ۳۱۲، ۳۱۳، ۳۱۴، ۳۱۵، ۳۱۶، ۳۱۷، ۳۱۸، ۳۱۹، ۳۲۰، ۳۲۱، ۳۲۲، ۳۲۳، ۳۲۴، ۳۲۵، ۳۲۶، ۳۲۷، ۳۲۸، ۳۲۹، ۳۳۰، ۳۳۱، ۳۳۲، ۳۳۳، ۳۳۴، ۳۳۵، ۳۳۶، ۳۳۷، ۳۳۸، ۳۳۹، ۳۴۰، ۳۴۱، ۳۴۲، ۳۴۳، ۳۴۴، ۳۴۵، ۳۴۶، ۳۴۷، ۳۴۸، ۳۴۹، ۳۵۰، ۳۵۱، ۳۵۲، ۳۵۳، ۳۵۴، ۳۵۵، ۳۵۶، ۳۵۷، ۳۵۸، ۳۵۹، ۳۶۰، ۳۶۱، ۳۶۲، ۳۶۳، ۳۶۴، ۳۶۵، ۳۶۶، ۳۶۷، ۳۶۸، ۳۶۹، ۳۷۰، ۳۷۱، ۳۷۲، ۳۷۳، ۳۷۴، ۳۷۵، ۳۷۶، ۳۷۷، ۳۷۸، ۳۷۹، ۳۸۰، ۳۸۱، ۳۸۲، ۳۸۳، ۳۸۴، ۳۸۵، ۳۸۶، ۳۸۷، ۳۸۸، ۳۸۹، ۳۹۰، ۳۹۱، ۳۹۲، ۳۹۳، ۳۹۴، ۳۹۵، ۳۹۶، ۳۹۷، ۳۹۸، ۳۹۹، ۴۰۰، ۴۰۱، ۴۰۲، ۴۰۳، ۴۰۴، ۴۰۵، ۴۰۶، ۴۰۷، ۴۰۸، ۴۰۹، ۴۱۰، ۴۱۱، ۴۱۲، ۴۱۳، ۴۱۴، ۴۱۵، ۴۱۶، ۴۱۷، ۴۱۸، ۴۱۹، ۴۲۰، ۴۲۱، ۴۲۲، ۴۲۳، ۴۲۴، ۴۲۵، ۴۲۶، ۴۲۷، ۴۲۸، ۴۲۹، ۴۳۰، ۴۳۱، ۴۳۲، ۴۳۳، ۴۳۴، ۴۳۵، ۴۳۶، ۴۳۷، ۴۳۸، ۴۳۹، ۴۴۰، ۴۴۱، ۴۴۲، ۴۴۳، ۴۴۴، ۴۴۵، ۴۴۶، ۴۴۷، ۴۴۸، ۴۴۹، ۴۵۰، ۴۵۱، ۴۵۲، ۴۵۳، ۴۵۴، ۴۵۵، ۴۵۶، ۴۵۷، ۴۵۸، ۴۵۹، ۴۶۰، ۴۶۱، ۴۶۲، ۴۶۳، ۴۶۴، ۴۶۵، ۴۶۶، ۴۶۷، ۴۶۸، ۴۶۹، ۴۷۰، ۴۷۱، ۴۷۲، ۴۷۳، ۴۷۴، ۴۷۵، ۴۷۶، ۴۷۷، ۴۷۸، ۴۷۹، ۴۸۰، ۴۸۱، ۴۸۲، ۴۸۳، ۴۸۴، ۴۸۵، ۴۸۶، ۴۸۷، ۴۸۸، ۴۸۹، ۴۹۰، ۴۹۱، ۴۹۲، ۴۹۳، ۴۹۴، ۴۹۵، ۴۹۶، ۴۹۷، ۴۹۸، ۴۹۹، ۵۰۰، ۵۰۱، ۵۰۲، ۵۰۳، ۵۰۴، ۵۰۵، ۵۰۶، ۵۰۷، ۵۰۸، ۵۰۹، ۵۱۰، ۵۱۱، ۵۱۲، ۵۱۳، ۵۱۴، ۵۱۵، ۵۱۶، ۵۱۷، ۵۱۸، ۵۱۹، ۵۲۰، ۵۲۱، ۵۲۲، ۵۲۳، ۵۲۴، ۵۲۵، ۵۲۶، ۵۲۷، ۵۲۸، ۵۲۹، ۵۳۰، ۵۳۱، ۵۳۲، ۵۳۳، ۵۳۴، ۵۳۵، ۵۳۶، ۵۳۷،

۵۴۔ مساوات (۱) = کا حل چیک کر کوئی سا ثابت صحیح عدد ہے۔

یہاں $\lambda = -1 = \text{مجم} + \text{ن جب } \pi$

∴ لاکھوں قیمتیں $\frac{1}{100}(1+r)^n$ + خراج $\frac{1}{100}(1+r)^n$ جس میں $r = 1$ ، $n = 10$ ۔

بجالیکہ ن ایک جنت ثبت صحیح عدد ۲۰ ف ہے تمام ا صلیں خیالی ہوتی ہیں اور اُن کی تعبیر

جہم $\left(\frac{1+r}{1+f}\right) \pm x$ جب $\pi \left(\frac{1+r}{1+f}\right)$ سے ہوتی ہے

جس میں رے، ا، ف۔ ا۔

بجائیکہ n ایک طاق مثبت صحیح عدد $2f + 1$ ہے، صرف $r = f$ کے تناظر اصل حقیقی ہے بقیہ اعلیں خیالی ہیں۔

پس اس صورت میں لا = حجم $\frac{1+r^2}{1+r^4} \pm$ رخ جب $\frac{1+r^2}{1+r^4}$ ۳

$r = 0$, 'ا'،، ف - ا کے لیے امدلا = - 'ا' = ر = ف کے لیے -

نتیجہ صریح - لائن + رائن کے اجزائے ضربی -

$$(1 - \frac{\pi}{2}r) (1 - \frac{\pi}{2}r) \dots (1 - \frac{\pi}{2}r) (1 - \frac{\pi}{2}r)$$

اور لا^{۱۲} + وا^{۱۲} کے اجزائے ضربی۔

پس لاکھ ۲ قیمتیں = لا = (جم $\frac{n}{n} + \frac{n}{n} \pm$ جم جب $\frac{n}{n} + \frac{n}{n}$) ہیں

جس میں $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ۔
ان کو جوڑوں ترتیب دے سکتے ہیں اور اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ

$لا^2 - ۲ لا$ لا جم n + $لا$ کے دو درجی اجزائے ضربی

$$\{ لا^2 - ۲ لا جم + لا \} \dots \{ لا^2 - ۲ لا جم + لا \} \dots \{ لا^2 - ۲ لا جم + لا \} \dots$$

اس لیے کہ یہ اجزائے ضربی = $(لا - جم) \frac{n}{n} + \frac{n}{n} \pm$ جم جب $\frac{n}{n} + \frac{n}{n}$ \times
 $(لا - جم) \frac{n}{n} + \frac{n}{n} \pm$ جم جب $\frac{n}{n} + \frac{n}{n}$ جس میں $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ۔

اس ضابطہ سے بعض اہم نتائج حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ
(۱) لا = ۱ لکھو اور عد کے بجائے ط لکھیں تب

$$\{ (۱ - جم) ط \}^2 = (۱ - جم) ط \dots \{ (۱ - جم) ط \}^2 = (۱ - جم) ط \dots \{ (۱ - جم) ط \}^2 = (۱ - جم) ط$$

اگر ہم یہاں بجائے ط کے ۲ ط لکھیں تو

$$جب^2 ن ط = ۲ جب^2 ط جب^2 ط \dots جب^2 ط جب^2 ط \dots جب^2 ط جب^2 ط$$

$$یا جب ن ط = \pm ۲ جب^2 ط جب^2 ط \dots جب^2 ط جب^2 ط \dots جب^2 ط جب^2 ط$$

جس کی بہم علامت کا ہنوز تصفیہ ہونا ہے۔

لیکن اگر ہم جب ط پر تقسیم کریں اور پھر ط ← جوئے دیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$ن = \pm ۲ جب^2 ط جب^2 ط \dots جب^2 ط جب^2 ط \dots جب^2 ط جب^2 ط$$

اجزائے ضربی جب $\frac{\pi}{n}$ جب $\frac{\pi^2}{n}$ جب $\frac{\pi(1-n)}{n}$ سب کے سب مثبت ہیں پس یہاں مثبت علامت لی جائیگی۔

لہذا جب $n = 1$ جب π جب π^2 جب $\pi(1-n)$ اب اگر بجائے π کے $(\pi + \frac{\pi}{n})$ لکھا جائے تو

جب $n = 2$ جب π جب π^2 جب $\pi(1-n)$

(ب) لا = ۱ (جم π + خ جب π) لکھو۔

تب چونکہ $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

$2 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

$2 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

$2 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

$2 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

اور لا = ۲ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

$2 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

$2 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

اسی طرح لا $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n) کے دوسرے اجزائے ضربی بھی مصرعہ بالا جملوں کے مشابہ لکھے جاسکتے ہیں۔

پس بالآخر

جم $n - 1 = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

اس تماثل میں بجائے π اور π کے $\frac{1}{n} + \pi$ اور $\frac{1}{n} + \pi$ لکھو

تب اگر ن جفت عدد ہے تو

جم $\frac{n}{2} (جم n - 1) = 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n)

{ جب $n - 1$ (جم 2π + خ جب 2π + ۱) $2 - 1 = 1$ (جم n + خ جب n) }

(نہد، محلی)

چھٹا باب

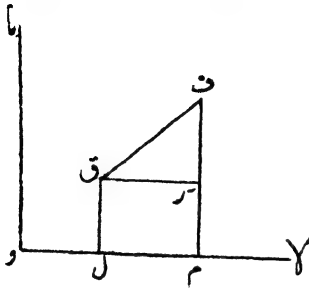
قائم اور قطبی محدّد۔ اُن کا استحالہ اور خطِ مستقیم کی مساواتیں

۵۷۔ (۱) محدّدوں کی تعریف۔ اگر دلا اور دما دو باہر
 علی التوائم محور میں تو اُن کے مستوی میں کسی نقطہ پ کے موقع یا محل کی
 تعیین ان محوروں سے اُن کے فاصلوں کے ذریعہ سے ہو سکتی ہے۔ یہ فاصلے
 اس نقطہ کے کارٹیزی محدد (Cartesian co-ordinates) کہلاتے ہیں
 اور لا، ما سے تعبیر کیے جاتے ہیں۔ ان محوروں کے تقاطع کا نقطہ و مبدأ
 کہلاتا ہے۔ اگر حوالہ کا صرف ایک محور دلا قرار دیا جائے تو نقطہ ف کی
 تعریف اس کے فاصلہ و ف اور زاویہ کلا و ف کے ذریعہ سے ہو سکتی
 ہے۔ یہ ف کے قطبی محدّد کہلاتے ہیں اور (س، ط) سے تعبیر کیے جاتے
 ہیں۔ س کو نیم قطر سمتی کہتے ہیں اور ط کو سمتی زاویہ۔
 کارٹیزی اور قطبی محدّدوں کے مابین مندرجہ ذیل روابط واضح ہیں:-

$$\text{لا} = \text{س} \cos \text{ط} \quad \text{ما} = \text{س} \sin \text{ط} \quad \text{س}^2 = \text{لا}^2 + \text{ما}^2 \quad \text{ط} = \tan^{-1} \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

ابتداء کارٹیزی محدّدوں سے بحث کی جائیگی۔ اس کے بعد قطبی محدّدوں سے۔
 کارٹیزی محدّدوں کا علی التوائم ہونا لازمی نہیں۔ یہ کسی بھی زاویہ پر مائل ہو سکتے
 ہیں۔ لیکن عموماً سہولت زاویہ قائمہ ہی کی صورت میں پائی جاتی ہے۔
 اس نصاب میں محوروں کا زاویہ میلان قائمہ ہی منظور ہوگا۔

(ب) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ان کے محدودوں کی رقموں میں۔



شکل ۱

شکل ۱ میں فرض کرو نقطہ 'ف' کے محدود 'لام'، 'ما' ہیں اور نقطہ 'ق' کے محدود 'لام'، 'م' اور 'ق' محور 'و' کے متوازی کھینچو اور 'ق' محور 'و' کے متوازی۔
تب ول = لام، ل ق = ما،

$$\text{وم} = \text{لام}، \text{م ف} = \text{ما}$$

$$\text{ف ق} = \text{ق ر} + \text{ر ف}$$

$$\text{لیکن ق ر} = \text{ل م} = \text{وم} - \text{ول} = \text{لام} - \text{لام}$$

$$\text{اور ر ف} = \text{م ف} - \text{م ر} = \text{م ف} - \text{ل ق} = \text{ما} - \text{ما}$$

$$\therefore \text{ف ق} = (\text{لام} - \text{لام}) + (\text{ما} - \text{ما})$$

$$\text{پس ف ق} = \pm \sqrt{(\text{لام} - \text{لام})^2 + (\text{ما} - \text{ما})^2}$$

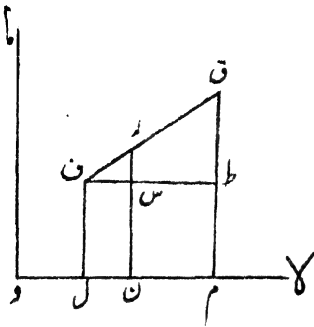
نقطہ 'ف' کا فاصلہ مبدا 'و' سے یا تو براہ راست دریافت کر لیا جاسکتا ہے یا مندرجہ بالا ضابطہ میں لام = ۰ اور ما = ۰ لکھنے سے۔ چنانچہ

$$\text{و ف} = \pm \sqrt{\text{لام}^2 + \text{ما}^2}$$

خطوط مستقیم جب محور 'و' یا 'و' کی سمت میں ناپے جاتے ہیں تو وہ مثبت تصور کیے جاتے ہیں اور ان کی مخالف سمتوں میں منفی۔ ان سمتوں کے متوازی سمتوں کے متعلق بھی یہی قرار داد مسلم ہے۔ دیگر اسات کے متعلق ایسی کوئی قرار داد نہیں۔ لیکن اگر ایک ہی خط مستقیم پر تین یا زیادہ نقطے 'ف'، 'ق'، 'ر' ہوں تو ہمیں چاہیے کہ اس خط پر جلد نقطوں کے لیے ایک ہی سمت کو مثبت تصور کریں اور اس کی مخالف سمت کو منفی تاکہ جلد صورتوں میں

$$\text{ف ق} + \text{ق ر} = \text{ف ر} \text{ ہو۔}$$

(ج) دو نقطوں کو ملانے والے خط مستقیم کو معینہ نسبت میں تقسیم کرنے والے نقطہ کے محدودوں کی تعیین۔



شکل ۱

شکل ۱ میں فرض کرو کہ
نقطہ ق کے محدود لا، ما میں اور نقطہ
ق کے محدود لا، ما - نقطہ ر خط ق
ک، ب کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور
اس کے محدود لا، ما ہیں - ن، ل، رن
ق م محور ما کے متوازی کھینچو اور فس ط
محور لا کے متوازی -

$$\text{تب } ل : ن : م = ف : س : ط = ر : ق = ک : ب \text{ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اور } (لا - لا) = (لا - لا) = ۰$$

$$\therefore لا = \frac{ک_۱ لا + ک_۲ لا}{ک_۱ + ک_۲} \text{ اسی طرح } ما = \frac{ک_۱ ما + ک_۲ ما}{ک_۱ + ک_۲}$$

اگر نقطہ ر سے خط ق کی تقصیف ہوتی ہے تو واضح ہے کہ ر کے محدود
 $\frac{۱}{۲} (لا + لا)$ اور $\frac{۱}{۲} (ما + ما)$ ہیں -

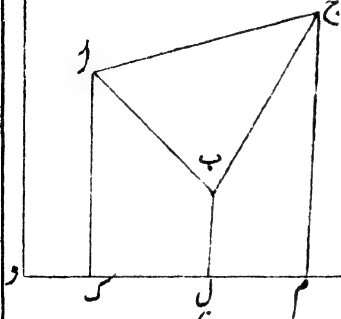
اگر ر خط ق کو نسبت ک، ب میں قطع کرے تو ل : ن : م = ک، ب : - ک، ب

$$\text{پس } لا = \frac{ک_۱ لا - ک_۲ لا}{ک_۱ - ک_۲} \text{ اور } ما = \frac{ک_۱ ما - ک_۲ ما}{ک_۱ - ک_۲}$$

مصرحہ بالا نتائج ہر صورت میں صحیح ہیں محوروں کے مابین کچھ ہی زاویہ ہو -

(د) ایک مثلث کے رقبہ

کے لیے جملہ اس کے زاویہ نقطوں
کے محدودوں کی رقبوں میں -



شکل ۲

شکل ۲ میں ل ب ج ایک مثلث

ہے جس کے زاویہ نقطوں ل، ب، ج
کے محدودوں علی الترتیب لا، ما، لا، اور لا، ما، لا،

اوک، بل اور ج م خطوط محور ما کے متوازی کھینچو۔

$$\Delta \text{ اوب ج} = \text{م ج اوک} - \text{ک ابل} - \text{ل ب ج م}$$

$$\text{لیکن م ج اوک} = \Delta \text{ م ج ل} + \Delta \text{ اوک م} = \frac{1}{2} \text{م م} \times \text{ج م} + \frac{1}{2} \text{م م} \times \text{ک م} \times \text{ک و}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{لام} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لام})$$

$$\text{اسی طرح ک ابل} = \frac{1}{2} (\text{لام} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لام})$$

$$\text{اور ل ب ج م} = \frac{1}{2} (\text{لام} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لام})$$

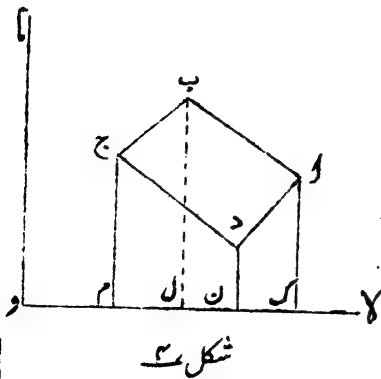
$$\therefore \Delta \text{ اوب ج} = \frac{1}{2} \{ (\text{لام} + \text{لا}) (\text{لام} - \text{لا}) + (\text{لام} + \text{لا}) (\text{لام} - \text{لا}) + (\text{لام} + \text{لا}) (\text{لام} - \text{لا}) \}$$

اس جملہ کو پھیلا کر اس میں سے جو رقبے کٹ جاتی ہیں ان کو نکال دینے سے

$$\Delta \text{ اوب ج} = \frac{1}{2} (\text{لا} + \text{لام} - \text{لا} + \text{لام} - \text{لام} + \text{لام} - \text{لا} + \text{لام} - \text{لا} + \text{لام})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \text{لا} & \text{لام} & \text{لا} \\ \text{لام} & \text{لام} & \text{لام} \\ \text{لام} & \text{لام} & \text{لام} \end{vmatrix}$$

مثلث کے رقبہ کے لیے مندرجہ بالا جملہ مثبت پایا جائیگا اگر دور اوب ج اوک کے اظہار کی ترتیب مخالف سمت ساعت ہوگی یعنی مثلث کے گرد گھومنے کے لیے مخالف سمت ساعت حرکت کرنی ہوگی۔ اگر حسابی عمل سے رقبہ کی قیمت منفی برآمد ہو تو سمجھنا چاہیے کہ مثلث کے گرد گھومنے کے لیے موافق سمت ساعت ترتیب اختیار کی گئی ہے۔



(ھ) ایک ذواربۃ الاضلاع

کا رقبہ اس کے زاویہ نقطوں کی

رقبوں میں (بلحاظ ایک مقررہ ترتیب کے)۔

شکل ۳ میں فرض کرو کہ 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'د' زاویہ نقطوں کے محدث علی الترتیب

(لا، لام)، (لام، لام)، (لام، لام) اور (لام، لام) ہیں۔

درجہ کی مساواتیں ہیں۔

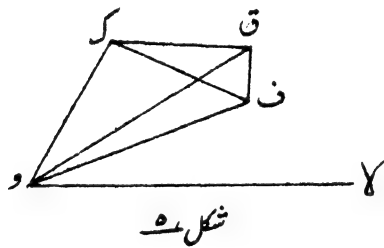
۵۸۔ قطبی محدّوں کا استعمال۔ کسی نقطہ کا سمتی زاویہ طہ اگر محور

و کا سمت مخالف سمت ساعت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت تصور کیا جاتا ہے۔ نیم قطر سمتی سر اگر مبدا و سے سمتی زاویہ کے حاط خط کی سمت میں ناپا جاتا ہے تو مثبت مانا جاتا ہے اور اگر اس کے مخالف سمت میں ناپا جاتا ہے تو منفی۔

(۱) دو نقطوں کا درمیانی فاصلہ نقطوں کے قطبی محدّوں کی

رقموں میں۔

اگر ف' ق دو نقطوں کے محدّوں سر، طہ اور سر، طہ ہوں تو علم المثلثات سے

$$ف ق^2 = وف^2 + وق^2 - 2 وف سر طہ \times وق سر طہ$$


لیکن وف = سر، وق = سر، طہ اور $ف ق > ف وق$

$= لا وق - لا وف = طہ - طہ$

∴ $ف ق^2 = سر،^2 + سر،^2 - 2 سر، سر، طہ (طہ - طہ)$

(ب) مثلث کا رقبہ اس کے زاویئ نقطوں کے قطبی

محدّوں کی رقوموں میں۔

فرض کرو شکل ۵۷ میں ف ق ک مثلث کے زاویئ نقطوں یعنی ف' ق اور ک کے محدّوں علی الترتیب (سر، طہ) (سر، طہ) اور (سر، طہ) ہیں۔

تب Δ ف ق ک = Δ ف ق + Δ وق ک۔ Δ ف ک

لیکن Δ ف ق = $\frac{1}{2}$ ف وق جب ف وق = $\frac{1}{2}$ سما سما جب (طہ - طہ)
 وق ک = $\frac{1}{2}$ سما سما جب (طہ - طہ) اور وق ک = $\frac{1}{2}$ سما سما جب (طہ - طہ)
 پس ف ق ک = $\frac{1}{2}$ {سما سما جب (طہ - طہ) + سما سما جب (طہ - طہ)}

+ سما سما جب (طہ - طہ) }

بطور شوق طالب علم کو چاہیے کہ ذرا بڑے الاضلاع ف ق ک ل کا رقبہ قطبی محدود
 میں دریافت کرے اور اس کے بعد قطبی اور کارٹیزی محدودوں کے باہمی رابطوں کی
 مدد سے اس رقبہ کو کارٹیزی محدودوں میں تحویل کرے۔

۵۹۔ خط مستقیم کی مساواتیں۔

اگر خط مستقیم محور Δ کے متوازی ہو تو واضح ہے کہ اس کی مساوات
 $\Delta = B$ ہوگی جس میں B اس کا عمودی فاصلہ محور Δ سے ہے۔ اسی طرح
 $\Delta = A$ ایسے خط کی مساوات ہے جو محور Δ کے متوازی ہے۔ یہاں A اس
 خط کا عمودی فاصلہ محور Δ سے ہے۔

اگر خط مستقیم L م ف محور Δ کو نقطہ L پر اور محور Δ کو نقطہ M پر
 قطع کرے تو فرض کرو کہ $OM = B$ اور $MS = A$ ۔ اگر خط کے کسی نقطہ

N کے عدد Δ A ہوں تو N

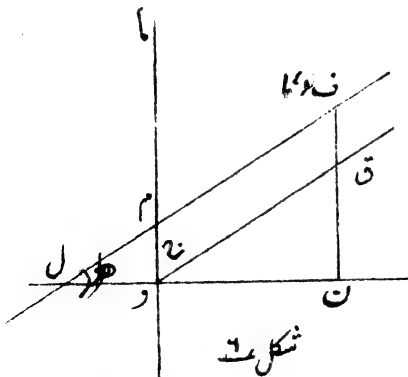
محور Δ کے متوازی کھینچو اور مباد

وین سے وق دیے ہوئے خط L م

کے متوازی کھینچو۔ دیکھو شکل م۔

تب $N = B + A$

$= OM + MS = OS$



شکل م

یعنی $A = OM + B$

کسی خاص خط مستقیم کے لیے M اور B مستقل ہونگے۔ واضح ہے کہ مندرجہ بالا

مساوات پہلے درجہ کی ہے۔
(۱) پہلے درجہ کی کوئی کسی مساوات خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

پہلے درجہ کی مساوات کی عام ترین صورت: $۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$ ہے۔
اس مساوات کے منحنی پر 'ف'، 'ق'، 'س' کوئی سے تین نقطے لیے جائیں اگر ان کے
محدد (لا، ما)، (لا، ما)، اور (لا، ما) ہوں تو دی ہوئی مساوات ان محدودوں کے
لیے بھی صحیح ہوگی۔ پس

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$$

۲، ب اور ج کو ساقل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے
یعنی 'ف'، 'ق'، 'س' نقطوں کو ملانے والے خطوط کا رقبہ
صفر ہے۔

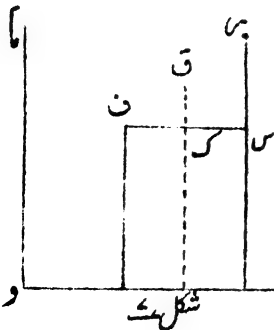
پس یہ نقطے خط مستقیم پر واقع ہیں۔ اور اس لیے
دی ہوئی مساوات خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

طریق دیگر - مندرجہ بالا تین مساواتوں میں ایک مساوات کو دوسری
مساوات میں سے خارج کرنے سے

$$۱ + (لا - لا) + ب + (ما - ما) = ۰$$

$$۱ + (لا - لا) + ب + (ما - ما) = ۰$$

$$\frac{لا - لا}{ما - ما} = \frac{لا - لا}{ما - ما}$$



پس $\frac{ف ک}{ک ق} = \frac{ف س}{س س}$ (دیکھو شکل ۱)

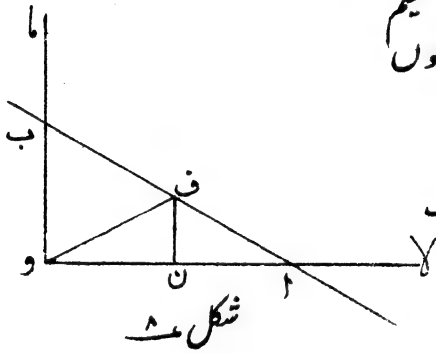
یعنی $\Delta ف ک ق$ اور $\Delta ف س س$ متشابه
ہیں جس سے واضح ہے کہ 'ف'، 'ق'، 'س' خط مستقیم ہے۔
اگر مساوات $۱ + لا + ب + ما + ج = ۰$ تو

$$۱ + لا + ب + ج = ۰$$

نکسین تو معلوم ہوگا کہ یہ مساوات $ما = مرلا + ج$ کے متشابہ ہے اس لیے کہ
 $مر = \frac{1}{ب} ج$ اور $ج = ب$ گویا خطِ مستقیم کی عام مساوات میں بھی
 صرف دو ہی مستقل ہیں۔

ب (ب) خطِ مستقیم کی مساوات مقطوعوں کی رقوموں میں جو حوالہ
 کے محوروں پر خط سے بنتے ہیں۔

فرض کرو کہ شکل ۸ میں خطِ مستقیم
 محور لا اور ما کو ۱ اور ب نقطوں
 میں قطع کرتا ہے۔



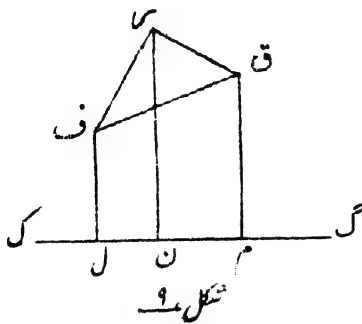
و ۱ = لا اور و ب = ب
 فرض کرو کہ خط پر کسی نقطہ ف
 کے محدود لا، ما ہیں۔
 ف ن محور ما پر علی القوائم کھینچو اور
 و ف کو ملاؤ

$$\begin{aligned} \text{تب } \Delta و ا ف + \Delta و ف ب &= \Delta و ا ب \\ \therefore لا + ب &= ب \\ \text{یعنی } ۱ &= \frac{۱}{ب} + \frac{لا}{ب} \end{aligned}$$

اگر محور کے مقطوعوں ۱ اور ب کے متکافیوں کو ل، م سے تعبیر کریں
 تو مندرجہ بالا مساوات صورت ل لا + م = ا میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

(ج) ایک خط پر دوسرے خط کا ظل۔

اگر کسی خط ف ق کے سروں ف اور ق سے کسی دوسرے خط
 ک گ پر عمود ف ل، ق م گرائے جائیں تو ل م خط ف ق کا خط ک گ پر
 ظل کہلائیگا۔



فرض کرو س کوئی آدر نقطہ ہے اور
ن اس کا ظل ک گ پر۔

تب چونکہ جملہ صورتوں میں

ل م + م ن = ل ن اس سے نتیجہ

برآمد ہوتا ہے کہ کسی خط پر ف ق اور ق س

کے ظلوں کا حاصل جمع اس خط پر ف س کے

ظل کے مساوی ہے۔

اسی طرح کسی خط پر اب، ب ج، ج د،، ف ق کے ظلوں کا حاصل جمع
ا ق کے ظل کے مساوی ہے۔ اگر کثیر الاضلاع بند شکل کا ہو تو کسی بھی خط پر اس
کے اضلاع کے ظلوں کا حاصل جمع صفر ہوگا۔

نتیجہ صریح۔ اگر ن ضلعوں والا منتظم کثیر الاضلاع کا کوئی ایک ضلع دیے ہوئے

نقطہ کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو اس کے دوسرے ضلعے اس خط کے ساتھ سلسلہ وار

ط + $\frac{\pi}{2}$ ، ط + $\frac{\pi}{2}$ ،، وغیرہ زاویے بنائینگے۔ پس ط کی

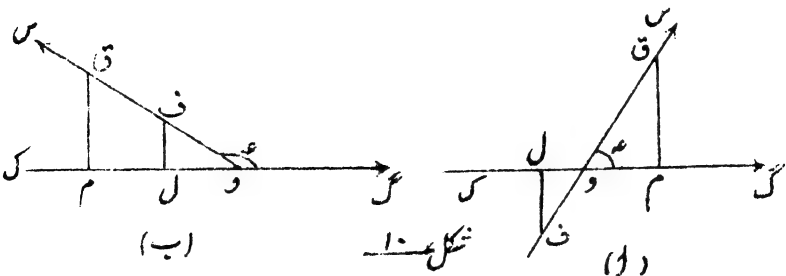
کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو

جم ط + جم (ط + $\frac{\pi}{2}$) + جم (ط + $\frac{\pi}{2}$) + + جم (ط + $\frac{\pi}{2}$) = جم ن قوں تک۔

ف ق جس خط پر واقع ہے اگر وہ خط ک گ کو نقطہ و میں قطع کرے اور اگر زاویہ

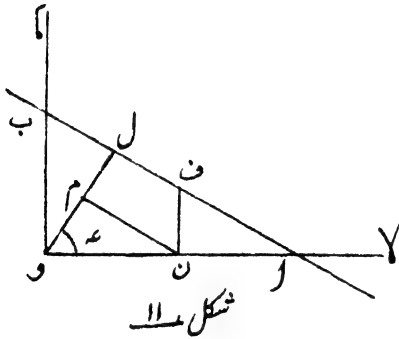
ک گ وں کو جو ان خطوط کی مثبت سمتوں و گ اور و س کے مابین بنتا ہے اس سے

تعبیر کیا جائے تو شکل ۱ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ



ول = وف جم ع اور دم = وق جم ع :۔ ل م = ف ق جم ع
پس کسی دیے ہوئے خط مستقیم ک گ پر کسی دوسرے خط ف ق کا ظل
ف ق جم ع ہوگا جس میں ع خط اک گ کی مثبت سمت اور اس خط کی
مثبت سمت کا درمیانی زاویہ ہے جس پر ف ق واقع ہے۔

(د) خط مستقیم کی مساوات، مبدا سے خط پر گرائے ہوئے
عمود کے طول اور عمود اور حوالے کے کسی محور کے درمیانی زاویہ کی
رقموں میں۔



فرض کر خط ا ب پر مبدا سے
گرائے ہوئے عمود ول کا طول ع ہے
(دیکھو شکل ۱۱) اور اس عمود کا زاویہ
محور د لا کے ساتھ (یعنی > لا دل)
ع ہے۔ ف کوئی سا ایک نقطہ خط
ا ب پر واقع ہے اور اس کے
محدد لا، ما ہیں۔

ف ن محور ما کے متوازی کھینچو اور ن م خط ول پر عمود گراؤ۔
ہر صورت میں > ما ول = > ما د لا + > لا دل = > لا د ما + > لا دل = > لا د + > لا دل
چونکہ خط ول پر خطوط دن اور ن ف کے طئوں کا حاصل جمع خود ول کے
مساوی ہے۔

اور دن کا ظل = ون جم ع اور ن ف کا ظل = ن ف جم ع = (ع + م) = ما جب ع
پس ع = لا جم ع + ما جب ع

واضح ہو کہ یہ مساوات منقطعوں والی اور عام مساوات کے ذیلیہ بھی آسانی
ثابت ہو سکتی ہے۔ چنانچہ

(۱) شکل ۱۱ سے ظاہر ہے کہ ع = لا جم ع = ب جب ع پس مساوات

$$\frac{ل}{ر} + \frac{پ}{ا} = ۱ \text{ میں } ۱ \text{ اور } ب \text{ کے عوض } ج \text{ اور } ب \text{ لکھنے سے}$$

$$۱ = \frac{لاجم ع}{ع} + \frac{ماجب ع}{ع}$$

یعنی لاجم ع + ماجب ع = ع

$$(۲) \text{ عام مساوات } ۱ + لا + ب + ما + ج = کو (۱ + ۲ + ۳) \text{ پر}$$

$$\text{تقسیم کرنے سے } \frac{۱}{(۱ + ۲ + ۳)} + \frac{لا}{(۱ + ۲ + ۳)} + \frac{ب}{(۱ + ۲ + ۳)} + \frac{ما}{(۱ + ۲ + ۳)} + \frac{ج}{(۱ + ۲ + ۳)} =$$

چونکہ $\frac{۱}{(۱ + ۲ + ۳)}$ اور $\frac{ب}{(۱ + ۲ + ۳)}$ کے مربوں کا حاصل جمع اکائی ہے اس لیے
یہ کسی زاویہ کی جیب التمام اور جیب کو تعبیر کرتے ہیں۔ اگر یہ زاویہ ع قرار دیا جائے تو

$$لاجم ع + ماجب ع = ع = جس میں ع بجائے - $\frac{ج}{(۱ + ۲ + ۳)}$ لکھا گیا ہے$$

(۵) کسی خط مستقیم کی دی ہوئی مساوات سے اس کی وضع معلوم کرنے کے

لیے اس کے صرف دو نقطوں کے محدودوں کا دریافت کر لینا کافی ہے۔ اس کے

لیے سہولت کے لحاظ سے لایا یا ما کی کوئی سی قیمتیں فرض کر کے دی ہوئی مساوات

سے ان کے متعلقہ ما یا لا کی قیمتیں معلوم کر لی جاسکتی ہیں۔ سب سے زیادہ

سہولت اس میں ہے کہ حوالہ کے محوروں کے ساتھ خط کے نقاط تقاطع دریافت کر لیے

جائیں۔ مساوات میں ما، لا کو علی الترتیب صفر لکھنے سے ان کا پتہ چل جاتا ہے۔

اگر ایسے خط مستقیم کی مساوات مطلوب ہے جو کوئی سے دو شرائط کی تکمیل

کرتا ہے تو دی ہوئی دو شرائطوں کی مدد سے خط کی کوئی سی عام شکل کی مساوات کے

اس کے دونوں مستقل دریافت کر لیے جائیں۔ مثلاً (۱) $ما = لا + ج$ میں $ما$ اور $ج$

(۲) $\frac{ل}{ر} + \frac{پ}{ا} = ۱$ میں ۱ اور $ب$ (۳) $ل + لا + ما = ۱$ میں $ل$ اور $ما$

(۴) $لاجم ع + ماجب ع = ع$ میں $ع$ اور $ع$ اور (۵) $۱ + لا + ب + ما + ج =$

میں $\frac{۱}{ج}$ اور $\frac{ب}{ج}$ ۔ ذیل میں اس کی چند مثالیں دی جاتی ہیں۔

(و) خط مستقیم کی مساوات جو کسی دیے ہوئے نقطہ میں

دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہو۔

فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدود لا، ما، ہیں اور خط کا محور کا کے ساتھ زاویہ مس-ا ہے۔ خط کی مساوات = مر لا + ج اور چونکہ نقطہ لا، ما، اس پر واقع ہے۔

$$\text{لہذا } ما = مر لا + ج \text{ پس}$$

$$ما - مر = (لا - لا)$$

(ز) دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی

مساوات -

اگر ان نقطوں کے محدود علی الترتیب (لا، ما،) اور (لام، ما،) ہوں تو مساوات

$$لا + ب + ما + ج = ۰ \text{ میں}$$

لا، ما کی یہ خاص قیمتیں نکھنے سے

$$لا + ب + ما + ج = ۰ \text{ اور } لام + ب + ما + ج = ۰$$

آخری دو مساواتوں میں سے 'ب'، 'ج' کو ساقط کرنے سے مطلوبہ مساوات

$$= \begin{vmatrix} لا & ما \\ لام & ما \end{vmatrix} \text{ حاصل ہو جاتی ہے}$$

(ح) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطہ تقاطع کے محدود۔

فرض کرو کہ ان خطوط کی مساواتیں

$$لا + ب + ما + ج = ۰$$

$$\text{اور } لام + ب + ما + ج = ۰ \text{ ہیں}$$

ان کا نقطہ تقاطع ان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کرے گا۔

پس ان مساواتوں کو حل کر کے لا اور ما کی قیمتیں حاصل کی جائیں گی وہ اس نقطہ تقاطع کے محدود ہوں گے۔ وہ حسب ذیل ہیں :-

$$\frac{1}{\text{ا ب} - \text{ا} \text{ب}} = \frac{2}{\text{ج} - \text{ا} - \text{ج} \text{ا}} = \frac{3}{\text{ب} - \text{ج} - \text{ب} \text{ج}}$$

(ط) تین خطوط مستقیم کے ایک نقطہ میں متقاطع ہونے کی شرط -

فرض کرو ان خطوط کی مساواتیں حسب ذیل ہیں :-

$$\text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = 0; \text{ا} - \text{ب} + \text{ج} = 0; \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} = 0$$

یہ خطوط ایک نقطہ میں متقاطع ہونگے اگر ان میں سے دو کے تقاطع کا نقطہ تیسرے پر واقع ہوگا۔

پہلی اور دوسری مساوات کے نقطہ تقاطع کے محددوں کی تصریح -

$$\frac{1}{\text{ا ب} - \text{ا} \text{ب}} = \frac{2}{\text{ج} - \text{ا} - \text{ج} \text{ا}} = \frac{3}{\text{ب} - \text{ج} - \text{ب} \text{ج}}$$

اس نقطہ تقاطع کے محددوں کو تیسری مساوات میں درج کرنے سے ہمیں معلوم ہو جاتا ہے کہ یہ نقطہ تیسرے خط پر واقع ہونے کی شرط کیا ہے۔ وہ شرط حسب ذیل ہے :-

$$\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} = 0; \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} = 0; \text{ا} - \text{ب} + \text{ج} = 0$$

$$\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} = 0; \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} = 0; \text{ا} - \text{ب} + \text{ج} = 0$$

(ی) دی ہوئی مساواتوں والے دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویہ کی تعیین -

(۱) اگر ان خطوط کی مساواتیں شکل لا جم عم + ماجب عم - عم = 0 اور لا جم عم + ماجب عم - عم = 0 دی جائیں تو ان کا درمیانی زاویہ (عم - عم) یا $\pi - (\text{عم} - \text{عم})$ ہوگا۔

اس لیے کہ عم' عم وہ زاویے ہیں جو ان خطوط پر مبدا سے گرائے ہوئے

طریق دیگر۔ چونکہ $ا + ب + ج =$ کے علی التوائم خط کی مساوات $ب - لا - ا + ج =$ ہے اور ایسا خط جو نقطہ $ا$ ، $ب$ میں سے گزرتا ہے اس کی مساوات $ب - (لا - لا) - ا - (ب - ب) =$ ہے۔ اگر یہ عمودی خط دیے ہوئے خط سے نقطہ $ک$ میں (جس کے محدد $لام$ ، $ب$ میں) ملتا ہے تو چونکہ $ک$ دونوں خطوط پر واقع ہے۔

لہذا $ب - (لام - لا) - ا - (ب - ب) =$ (۱)

اور $ا + ب + ج =$ اس آخری مساوات کو ہم لکھ سکتے ہیں

$$ا + ب + ج - (ا + ب + ج) = - (ا + ب + ج)$$

یا $ا - (لا - لا) + ب - (ب - ب) = - (ا + ب + ج)$ (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے مربعوں کو جمع کرنے سے

$$(ا + ب) = \{ (لام - لا)^2 + (ب - ب)^2 \} = (ا + ب + ج)^2$$

$$\text{لیکن } ک ف = \sqrt{(لام - لا)^2 + (ب - ب)^2}$$

$$\therefore ک ف = \frac{ا + ب + ج}{(ا + ب)}$$

پس اگر کسی خط مستقیم کی مساوات بشکل $ا + ب + ج =$

دی گئی ہے تو اس سے کسی دیے ہوئے نقطہ کا عمودی فاصلہ اس

نقطہ کے محددوں کو جملہ $ا + ب + ج =$ میں تقویض کرنے

اور $لا$ اور $ب$ کے سروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے جذر المربع

پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر $ا + ب$ کو ہمیشہ مثبت مانیں تو خط کی مثبت جانب کے کسی نقطہ سے

گرائے ہوئے عمود کا طول مثبت ہوگا اور خط کی منفی جانب کے کسی نقطہ سے گرائے ہوئے

عمود کا طول منفی ہوگا۔

(م) دیے ہوئے دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کی

تخصیص کرنے والے خطوط کی مساواتیں -

دو خطوط مستقیم کے درمیانی زاویوں کی تخصیص کرنے والے دو خطوں میں سے کسی ایک پر کے کوئی اسے نقطہ سے جو عمود ان خطوط مستقیم پر گرائے جاتے ہیں بمقام مقدار ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

پس ان خطوط کی مساواتیں اگر

۱ لا + ب + ج = ۰ (۱) اور لا + ب + ج = ۰ (۲) ہوں اور (لا، ب) کوئی ساقطہ ان کے دو منصفوں میں سے کسی ایک منصف پر واقع ہو تو

$$\frac{لا + ب + ج}{لا + ب} = \frac{لا + ب + ج}{لا + ب} \quad \text{اور} \quad \frac{لا + ب + ج}{لا + ب} = \frac{لا + ب + ج}{لا + ب}$$

بمقام مقدار مساوی ہونی چاہئیں۔

پس نقطہ (لا، ب) مندرجہ ذیل دو خطوط مستقیم میں سے کسی ایک خط پر ہونا چاہیے:

$$\frac{لا + ب + ج}{لا + ب} = \pm \frac{لا + ب + ج}{لا + ب} \quad (۳) \quad \dots \dots \dots$$

پس مساوات (۳) سے جن دو خطوط کی تعبیر ہوتی ہے وہ مطلوبہ منصف ہیں۔ ان دونوں منصفوں میں امتیاز کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے کہ اگر ہم دونوں نسب نماؤں کو مثبت مانیں اور مساوات (۳) میں اوپر والی علامت لیں تو

لا + ب + ج = لا + ب + ج اور لا + ب + ج = لا + ب + ج دونوں کے دونوں مثبت ہونگے یا منفی۔

$$\text{اس لیے} \quad \frac{لا + ب + ج}{لا + ب} = \frac{لا + ب + ج}{لا + ب} \quad (۴) \quad \dots \dots \dots$$

ہر ایک نقطہ دی ہوئی مساواتوں (یعنی (۱) اور (۲) مساواتوں) والے دونوں خطوط کی مثبت جانب ہوگا یا دونوں خطوط کی منفی جانب۔

اگر مساواتیں اس طرح لکھی جائیں کہ دونوں کی متعلقہ قسمن مثبت ہیں تو مبداء دونوں خطوط کی مثبت جانب ہے۔ پس مساوات (۴) اس زاویہ کے منصف سے متعلق ہے جس کے اندر مبداء واقع ہے۔

(ن) دو دیے ہوئے خطوط مستقیم کے نقطہ تقاطع میں گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات -

سب سے سیدھا طریقہ مطلوبہ مساوات کے حاصل کرنے کا یہ ہے کہ دیے ہوئے خطوط کا نقطہ تقاطع (لا، ما) پہلے معلوم کر لیا جائے اور پھر اس نقطہ میں سے گزرنے والے خط کی عام مساوات بشکل ما - ما = مر (لا - لا) استعمال کی جائے۔ لیکن بعض اوقات مندرجہ ذیل طریقہ بہتر پایا جاتا ہے -

فرض کرو ان دو خطوط کی مساواتیں
 $لا، لا + ب، ما + ج = ۰ \dots (۱)$
اور
 $لا، لا + ب، م + ج = ۰ \dots (۲)$ ہیں
اب مساوات لا، لا + ب، ما + ج + لہ (لا، لا + ب، ما + ج) = ۰ (۳) پر غور کرو۔
چونکہ وہ پہلے درجہ کی ہے اس لیے ایک خط مستقیم کی مساوات ہے۔ اور اگر نقطہ (لا، ما) دونوں خطوط کا مشترک ہے تو

$لا، لا + ب، ما + ج = ۰$ اور $لا، لا + ب، م + ج = ۰$
اور اس لیے (لا، لا + ب، ما + ج) + لہ (لا، لا + ب، م + ج) = ۰ اور اس سے ظاہر ہے کہ نقطہ (لا، ما) مساوات (۳) والے خط پر واقع ہے۔

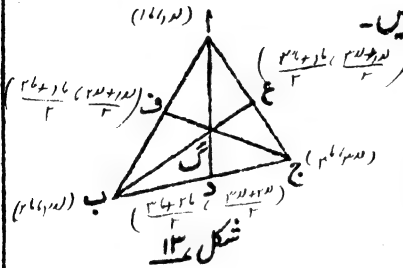
پس مساوات (۳) دیے ہوئے دو خطوط کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات ہے۔ لہٰذا اگر مناسب قیمت دی جائے تو اس مساوات سے کسی اور شرط کی بھی تکمیل کرائی جاسکتی ہے۔ مثلاً یہ خط کسی دوسرے دیے ہوئے نقطہ میں سے بھی گزارا جاسکتا ہے۔ پس مساوات (۲) لہ کی مختلف قیمتوں کے لیے خطوط (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے تمام خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

(س) اگر تین خطوط مستقیم کی مساواتیں علی الترتیب لا، لا + ب، ما + ج = ۰، لا، لا + ب، م + ج = ۰ اور لا، لا + ب، م + ج = ۰ ہوں اور اگر ہم لہ، مہ نہ تین ایسے مستقل دریافت کر سکتے ہیں جن کے لیے رابطہ

لہ (لا، لا + ب، ما + ج) + مہ (لا، لا + ب، م + ج) + نہ (لا، لا + ب، م + ج) = ۰ (۱) متماثل صحیح ہو یعنی لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہو تو یہ تینوں خطوط مستقیم

ایک نقطہ پر ملینگے۔ کیونکہ اگر کسی نقطہ کے محدود خطوط کی مساواتوں میں سے کوئی سی دو مساواتوں کی شرط کو پورا کرے تو رابطہ (۱) بتاتا ہے کہ وہ نقطہ تیسری مساوات کی شرط کو بھی پورا کرے گا۔ یہ اصول بجھت مستعمل ہے۔

مثال۔ مثلث کے زاویہ کی نقطوں کو ان کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے ملانے والے خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔



شکل ۱۳ میں فرض کرو 'ا'، 'ب'، 'ج' زاویہ کی نقطوں کے محدود علی الترتیب (لا، لا، لا) (لا، لا، لا) اور (لا، لا، لا) ہیں۔ تب ان کے مقابل کے ضلعوں کے وسطی نقطوں 'د'، 'ع'، 'ف' کے محدود علی الترتیب

$$\left(\frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲} \right), \left(\frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲} \right) \text{ اور } \left(\frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲}, \frac{لا + لا}{۲} \right) \text{ ہونگے}$$

$$\text{پس خط ا د کی مساوات} = \frac{لا - لا}{لا + لا + لا} = \frac{لا - لا}{لا + لا + لا} \dots \dots (۱) \text{ ہوگی۔}$$

یعنی (لا، لا، لا) - (لا، لا، لا) - (لا، لا، لا) + (لا، لا، لا) - (لا، لا، لا) + (لا، لا، لا) = ۰۔ اسی طرح ب ع اور ج ف کی مساواتیں علی الترتیب

$$\begin{aligned} & (لا + لا، لا + لا، لا) - (لا + لا، لا + لا، لا) + (لا + لا، لا + لا، لا) - (لا + لا، لا + لا، لا) + (لا + لا، لا + لا، لا) = ۰ \\ & \text{اور } (لا + لا، لا + لا، لا) - (لا + لا، لا + لا، لا) + (لا + لا، لا + لا، لا) - (لا + لا، لا + لا، لا) + (لا + لا، لا + لا، لا) = ۰ \text{ ہونگی} \end{aligned}$$

اور چونکہ یہ مساواتیں جب جمع کی جاتی ہیں تو متبادلاً معدوم ہو جاتی ہیں، اس لیے وہ خطوط جن کو یہ تعبیر کرتی ہیں ایک نقطہ پر ملنے جا رہیں۔

[مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے آسانی معلوم ہو جائیگا کہ نقطہ گ

جس کے محدود $\frac{۱}{۳}$ (لا، لا، لا) اور $\frac{۱}{۳}$ (لا، لا، لا) ہیں خط ا د پر واقع ہے۔ اور اس نتیجہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ گ خطوط ب ع اور ج ف پر بھی واقع ہے۔]

(ع) ان ویں درجہ کی متجانس مساوات مبداء میں سے گزرنے والے ن خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

فرض کرو کہ مساوات

اس کو لان پر تقسیم کرو تو

$$(2) \dots = k + \dots + \left(\frac{1}{v}\right)^{r-1} j + \left(\frac{1}{v}\right)^{r-1} b + \left(\frac{1}{v}\right)^r$$

از روئے رابطہ (۱) اور (۲)

اگر ب^۱۔ ا ج مثبت ہو تو خطوط حقیقی ہونگے۔ اگر ب^۱۔ ا ج = ۰۔ تو دونوں منطقی ہونگے۔ اگر ب^۱۔ ا ج منفی ہو تو خطوط خیالی ہونگے لیکن حقیقی نقطہ (۰۔۱) میں سے گزریں گے۔

سادات ۱ لا + ۲ ب لا + ج ما = ۰۔ والے خطوط باہر گیر علی القواہم ہونگے اگر ا + ج = ۰۔ یعنی اگر لا + ۲ ب کے سروں کا حاصل جمع صفر ہو گا۔

(ص) دوسرے درجہ کی عام سادات دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرنے کی شرط کی تعیین۔

دوسرے درجہ کی عام ترین سادات ۱ لا + ۲ ج لا + ۳ ب لا + ۴ گ لا + ۵ ف لا + ج = ۰۔ (۱) ہے

اگر یہ متماثل (ل لا + م ما + ن) (ل لا + م ما + ن) = ۰ (۲) کے مساوی ہے۔

تو (۱) اور (۲) مساواتوں میں متعلقہ سروں کو مساوی لکھنے سے

ل = ۱، م = ۲، ب = ۳، ن = ۴ ج

م + ن = ۴، ف = ۵، ن + ل = ۴، گ = ۶، ل + م = ۳، ج = ۲

آخر الذکر تین رابطوں کو مسلسل ضرب دینے سے

۸ ف گ ج = ۲ ل م م ن ل + ل ن (م ن + م ن) + (۲)

م م (ن ل + ل ن) + ن ن (ل م + ل م)

= ۲ ب ج + ۱ (۲ ف - ۲ ب ج) + ب (۲ گ - ۲ ج ل) + ج (۲ ہ - ۲ ب)

پس ۱ ب ج - ۱ ف - ۲ ب گ - ۲ ج ح + ۲ ف گ ج = ۰ (۳) مطلب یہ شرط ہے۔

[الا اس صورت کے کہ جس میں لا اور ما کے سروں دونوں صفر ہیں مندرجہ بالا

نتیجہ دی ہوئی مساوات کو بطور لا اور ماکی دو درجی مساوات کے حل کرنے سے زیادہ سادگی کے ساتھ حاصل ہو سکتا ہے۔
 فرض کرو (۱) صفر نہیں ہے، تب اگر ہم مساوات کو شکل (۱) + لا (۲) ح م + م (۲) گ (۲) + (ب م + م ۲ ف م + ج) = ۰ لکھ کر لاکی دو درجی مساوات کی طرح حل کریں تو

$$(۱) + لا ح م + گ = \pm م (۲) (ج - ب) + م (۲) (ج - گ - ف) + م (۲) (ج - ف)$$

یہ مساوات (۱) + لا + ب م + ج = ۰ کی صورت میں تحویل پذیر ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہو گا کہ جذر المربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

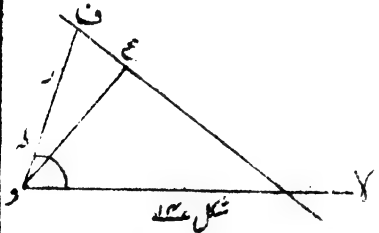
(ج - ب) (گ - ف) = (ج - گ - ف) (ج - ف)
 اس کو پھیلا کر پر تقسیم کریں تو وہ (۳) کے معادل پائی جائیگی۔

(ق) خط مستقیم کی قطبی مساوات

فرض کرو مبداء ہے اور محور و لا کے لحاظ سے زاویہ طرہ ناپا جاتا ہے۔

دیے ہوئے خط مستقیم پر ف
 کوئی سا نقطہ ہے جس کے قطبی محور
 لا اور طہ ہیں۔ شکل ۱۱۱۔

مبداء سے خط پر عمود و ع
 گرایا جاتا ہے، و ع = ع اور زاویہ
 لا و ع = م

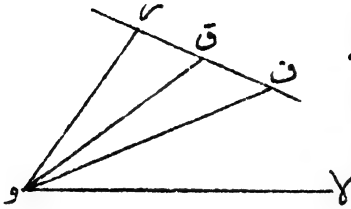


ح ع و ف = (ط - ع) اور
 و ف جم ع و ف = و ع

پس مطلوبہ مساوات = رجم (ط - ع) = ع
 خط مستقیم کی مساوات لاجم ع + مابج ع = ع میں لاکے عوض رجم طہ اور ماکے
 عوض رجم طہ لکھنے سے بھی معرکہ بالاسادات حاصل ہو جاتی ہے۔

(سا) دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خط مستقیم

کی قطبی مساوات۔



شکل ۱۵۔

فرض کرو فاق دیے ہوئے دو نقطے
ہیں جن کے محدود بالترتیب ر، ط، ادر ر، ط،
ہیں۔ اگر سا خط مستقیم پر کوئی سا دوسرا نقطہ ہے
جس کے محدود ر، ط، ہیں تو

چونکہ $\Delta ف وق + \Delta ق و سا$

$= \Delta ف و سا$

لہذا ر، جب (ط، - ط،) + ر، جب (ط، - ط،) رجب (ط، - ط،) =

پس مطلوبہ مساوات = ر، جب (ط، - ط،) + ر، جب (ط، - ط،)

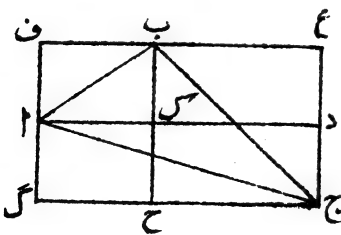
+ ر، جب (ط، - ط،) =

(مش) ذیل میں چند اہم مثالیں حل کر کے بتائی جاتی ہیں :-

(۱) ایک مثلث کے ضلعوں پر بطور وتروں کے متوازی الاضلاع کھینچے
جاتے ہیں جن کے ضلعے محور لا و ما کے متوازی ہیں۔ بتاؤ کہ ان متوازی الاضلاعوں
کے دوسرے وتر ایک نقطہ پر ملینگے۔

مثلث (ب ج کے زادی نقطوں کے محدودوں کو علی الترتیب (لام، ما،

(لام، ما،) اور (لام، ما،) مانو۔



شکل ۱۶ میں یہ متوازی الاضلاع

بتائے گئے ہیں۔ یہ ثابت کرنا ہے

کہ وتر فاق، ع ح اور د گ

ایک نقطہ پر ملینگے۔

چونکہ ف اور گ کے

محدود (لام، ما،) اور (لام، ما،)

ہیں۔

شکل ۱۶۔

پس ف گ کی مساوات $\frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{لام - لام}{لام - لام}$ ہے۔

یعنی لا (لام - لام) + لا (لام - لام) + لا (لام - لام) + لا (لام - لام) = . ہے
اسی طرح وتر ع ج کی مساوات

لا (لام - لام) + لا (لام - لام) + لا (لام - لام) + لا (لام - لام) = . ہے

اور وتر د گ کی مساوات لا (لام - لام) + لا (لام - لام) + لا (لام - لام) + لا (لام - لام) = . ہے
ان تینوں مساواتوں کا حاصل جمع متماثل صفر ہے لہذا یہ تینوں خطوط مستقیم

ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۲) ایک ثابت نقطہ ہمیں سے کوئی ساخط مستقیم کھینچا جاتا ہے جو محور لا و ما
کو علی الترتیب خطوط ف اور ق میں قطع کرتا ہے اور متوازی الاضلاع وف س ق
مکمل کر دیا جاتا ہے۔ سر کے طریق کی مساوات معلوم کرو۔

فرض کرو کہ نقطہ س کے محدود ک اور گ ہیں۔ خط ف ق کی کسی ایک
وضع میں اگر مساوات $\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{لا} = ۱$ (۱)

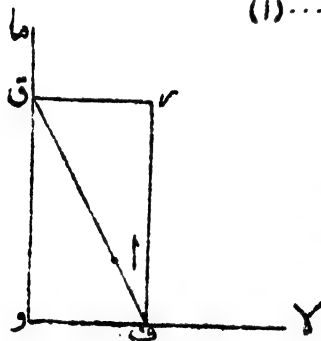
مانی جائے تو نقطہ س کے محدود ع اور
بہ ہونگے۔

لیکن چونکہ خط ف ق نقطہ ک گ

میں سے گزرتا ہے مساوات (۱) میں بجائے

لا و ما ہم علی الترتیب ک و گ لکھ سکتے ہیں۔

پس $\frac{ک}{ک} + \frac{گ}{گ} = ۱$ (۲)



شکل نمبر ۱

اس لیے نقطہ س کے محدود ع اور بہ صورت میں مساوات (۲) کی تصدیق
کرینگے۔ ان کو اگر ہم لا و ما سے تعبیر کریں تو سر کے طریق کی مساوات
 $\frac{ک}{ک} + \frac{گ}{گ} = ۱$ ہوگی۔

(۳) ایک مثلث ل ب ج کے زاویہ نقطوں کے محدود علی الترتیب
(لا، ما)، (لام، لام)، (لا، لام) ہیں۔ اس کے اندرونی اور خارجی دائروں کے

مرکز معلوم کرو۔

خطیب ج کی مساوات $ما (لا - لام) - لا (لام - لام) + لام لام$
 $- لام لام = ۰ \dots\dots (۱)$ ہے

خط ج (کی مساوات $ما (لام - لا) - لا (لام - لا) + لام لا - لام ما = ۰ \dots\dots (۲)$
 اور $ب کی مساوات $ما (لام - لا) - لا (لام - ما) + ما لام$$

$- لا ما = ۰ \dots\dots (۳)$

ان خطوط پر اندرونی اور جانبی دائروں میں سے کسی بھی دائرے کے مرکز سے گرائے ہوئے عمود متلاسمیں مساوی ہیں پس از روئے (د) ان چار دائروں کے مرکزوں کے محدود مندرجہ ذیل رابطوں کے لا اور ما ہیں

$$\frac{ما (لام - لا) - لا (لام - ما) + ما لام - لا ما}{ما (لام - لا) + لا (لام - ما)}$$

$$\frac{ما (لام - لا) - لا (لام - ما) + ما لام - لا ما}{ما (لام - لا) + لا (لام - ما)} = \pm$$

$$\frac{ما (لا - لام) - لا (لا - ما) + ما لام - لا ما}{ما (لا - لام) + لا (لا - ما)} = \pm \quad (۴)$$

اگر مثلث کے زاویہ نقطوں 'ب'، 'ج' کے محدودوں کو علی الترتیب

مساوات (۱)، (۲)، (۳) میں تعین کریں تو ان سب کے سیدھے جانب کے چلے ایک ہی ہونگے۔ پس مثلث کے زاویہ نقطے یا تو سب کے سب خطوط (۱)، (۲)، (۳) کے مثبت جانب ہونگے یا سب کے سب ان کے منفی جانب اندرونی دائرہ کے مرکز سے مثلث کے ضلعوں پر جو عمود ڈالے جاتے ہیں سب کے سب اسی سمت میں پھینچے جاتے ہیں جس سمت میں مثلث کے زاویہ نقطوں کے عمود۔ پس اندرونی دائرہ کے لیے روابط (۴) میں مثبت منفی کا جہاں اشتباہ بتایا گیا ہے

وہ سب مثبت ہونگے۔

جانبی تین دائروں کے لیے یہ علامتیں علی الترتیب $+++-$ اور $++--$ ہونگی۔

روابط (۴) کی کسروں کے نسب نماؤں پر غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ وہ مثلث (ب ج کے ضلعے) (ب ج ہیں۔

اگر (لا، ما) اندرونی دائرہ کے مرکز کے تحت ہیں لیکن روابط (۴) کی مثبت علامتوں میں سے صرف مثبت علامتیں لی جائیں گے تو تینوں شمار کنندوں کا حاصل جمع $\Delta^2 =$ اور تینوں نسب نماؤں کا حاصل جمع $= (ا + ب + ج)$ کیونکہ اس حاصل جمع میں لا اور ما کے سرودوں صفر ہیں۔ پس نسبتوں کے خواص کی رُو سے دی ہوئی

$$\frac{\Delta^2}{(ا + ب + ج)} = \text{تینوں کسروں میں سے ہر ایک کسر}$$

اب شمار کنندوں اور نسب نماؤں کو سلسلہ وار لا، لام اور للہ سے ضرب دو اور جمع کرو۔

$$\frac{\Delta^2 لا}{(ا + ب + ج + لا)} = \text{تب ہر ایک کسر}$$

$$\frac{\Delta^2 لا}{(ا + ب + ج + لا)} = \frac{\Delta^2}{(ا + ب + ج)}$$

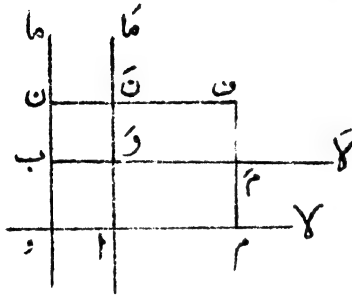
$$\text{لہذا لا} (ا + ب + ج) = (ا + ب + ج + لا) لا$$

اس طرح ما $(ا + ب + ج) = (ا + ب + ج + ما) ما$ اور لام $(ا + ب + ج + لام) لام$ ان دو مساواتوں سے مثلث کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود اس کے زاویہ نقطوں کے محدودوں اور اس کے ضلعوں کے طولوں کی رقومیں حاصل ہوتے ہیں۔

[واضح ہو کہ اوپر کی تین مثالوں کا حل نہ صرف علی القوائم محوروں کے لیے صحیح ہے بلکہ ماثل محوروں کے لیے بھی۔]

(ت) محدودوں کا استحالہ۔

جب محوروں کا انتخاب اختیاری ہوتا ہے تو ایسے محور منتخب ہو سکتے ہیں جن سے کسی مسئلہ کے حل کرنے میں بہت زیادہ سہولت حاصل ہو۔ کسی صورت میں بھی محوروں کی تبدیلی ایک خاص اہمیت رکھتی ہے۔ ہم اب بتائیں گے کہ اگر کسی منحنی کی مسادات محوروں کے ایک نظام کے لحاظ سے دی گئی ہو تو ان کے کسی دوسرے نظام کے لحاظ سے اس مسادات کی کیا صورت ہوگی۔



(۱) محدودوں کے مبداء کی

تبدیلی، محوروں کی سمتوں کی تبدیلی

فرض کرو کہ ابتدائی محور و لا

اور و ما۔ تھے اور جدید محور و لا اور

و ما ہیں۔ دیکھو شکل ۱۸۔ نئے مبداء کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالہ سے

و اور ک ہیں۔ ن دیے ہوئے منحنی کا ایک نقطہ ہے۔ چونکہ و ف

اور و ف کے ظل محور و لا پر مسادی ہیں لہذا لا = لا + و

اسی طرح ما = ما + ک

نئے محدودوں کی سمتوں میں منحنی کی مسادات حاصل کرنے کے لیے دی

ہوئی مسادات میں ابتدائی محدودوں کے عوض ان کی مندرجہ بالا قیمتیں درج کر دی جائیں۔

(۲) مبداء کی تبدیلی، بغیر محوروں کا گھماؤ زاویہ طہ میں۔

بہ لحاظ قدیم محور و لا و ما۔

نقطہ ق کے محدود لا اور ما ہیں اور بلحاظ جدید محور (یعنی و لا،

وما) لا اور ما دیکھو شکل ۱۹۔

و ف خط کھینچو اور ف م محور و لا پر عمود گراؤ۔

$$r = \frac{1}{10} = \frac{9 \times 2 + 1 \times 2}{10} = 1$$

محور کا پروف کا نطل =

وَم کا نطل + مَف کا نطل

محور کا پروف کا نطل = لا'

وَم کا نطل = لا جَم طہ

اور مَف کا نطل =

لا جَم (لا + طہ) = - مَاجِب طہ لا

پس لا = لا جَم طہ - مَاجِب طہ

اسی طرح چونکہ وف کا نطل محور و ما پر = وَم کا نطل + مَف کا نطل

لہذا ما = لا جَم (لا + طہ) + مَاجِب طہ = لا جَم طہ + مَاجِب طہ

دی ہوئی مساوات میں لا اور ما کی یہ جدید قیمتیں درج کرنے سے منہنی

کی مساوات نئے محوروں کے حوالہ سے حاصل ہو جاتی ہے۔

مثالیں

(۱) مثلث کے ہندسی مرکز (یعنی اس کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع)

کے محمد دریافت کرو۔

(۲) وہ خط مستقیم جو نقطوں (۵، ۵)، (۵، ۲) میں سے گزرتا ہے نقطوں

(۱۵، ۳) اور (۵، ۲) میں سے بھی گزرتا ہے۔

(۳) مساوات ۵ لا + ۱۲ ما - ۲۶ = کو لا جَم عہ + مَاجِب عہ - ع = کی

صورت میں تبدیل کر کے ثابت کرو کہ ع کی قیمت ۲ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ خط ما - لا + ۲ = نقطوں (۳، ۱) اور (۸، ۹) کو ملانے

والے خط کو ۲:۳ کی نسبت میں قطع کرتا ہے۔

(۵) دو خطوط مستقیم نقطہ (۴، ۳) میں سے گزرتے ہیں اور محوروں کو

اس طرح قطع کرتے ہیں کہ ان کے مقطوعے مقدار میں مساوی ہیں۔ بتاؤ کہ ان کی مسادیتیں $لا + ما = ۱$ اور $لا - ما = ۷ = ۰$ ہیں۔

(۶) ایک مثلث کے اضلاع کی مسادیتیں $لا - ۷ + ما = ۲۵ = ۰$ ہے اور اس کے راسوں کے محدود علی الترتیب $(۱-۲)$ ، $(۲-۳)$ اور $(۳-۴)$ ہیں۔

(۷) آج ایک مثلث ہے جس کے زاویعی نقطوں کے محدود علی الترتیب $(۱، ۲)$ ، $(۲، ۵)$ اور $(۵، ۹)$ ہیں۔ بتاؤ کہ اس کے اندرونی دائرہ کے مرکز کے محدود ۱۱ اور ۱۱ ہیں۔

(۸) تین خطوط کی مسادیتیں $ما = م + لا + ج$ ، $ما = م + لا + ج$ اور $ما = م + لا + ج$ ہیں۔ ان سے جو مثلث تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔
(۹) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس سے جو عمود دیے ہوئے دو خطوط مستقیم پر گرائے جاتے ہیں ان کے طوول کا حاصل جمع مستقل ہے۔
بتاؤ کہ نقطہ کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ کسی بھی مثلث کے ضلعوں کے عمودی منصف ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۱) ثابت کرو کہ مثلث کے راسوں سے ان کے مقابل کے ضلعوں پر جو عمود گرائے جاتے ہیں وہ سب ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

(۱۲) وہ تمام خطوط جن کے لیے $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$ مستقل سب کے سب ایک نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔ اس نقطہ کے محدود معلوم کرو اور سب باہمی علی القواکم محوروں کے مقطوعے ہیں۔

[اس مثال سے پتہ عدسہ کے ماسکی طول کی پائش کا اچھا طریقہ ہوتا ہے] اس کی توضیح کرو۔

(۱۳) چوتھے سوال کی عمومی صورت کو پیش نظر رکھ کر یعنی خط کی مساوی $لا + ب + ج = ۰$ اور نقطوں کے محدودوں کو $(لا، ما)$ اور $(لام، مان)$ کے

ثابت کرو کہ کوئی سا خط مستقیم کسی مثلث کے ضلعوں فم، فم، فم اور فم کو نقطوں ل، م اور ن پر اس طرح قطع کرتا ہے کہ

$$1 = \frac{فل}{ل فم} \times \frac{فم م}{م فم} \times \frac{فم ن}{ن ف}$$

(۱۴) ثابت کرو کہ مساوات لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = ۱۸ ہے۔
دو خطوط متقیم کو بتیر کرتی ہے جن کا درمیانی زاویہ ۵۴° ہے۔

(۱۵) ثابت کرو کہ اگر ل = ۲ تو مساوات لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = ۱۱

- لا^۲ + لا^۲ = ۵۔ دو خطوط متقیم کو بتیر کرتی ہے اور ان کا درمیانی زاویہ ۵۴° ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات ب لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ = ۲ کے
کو تعبیر کرتی ہے جو علی الترتیب خطوط لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ کے
علی القوائم ہیں۔

(۱۷) آج ایک متوازی الاضلاع ہے۔ آ کو قطب اور ب کو
حوالہ کا خط مان کر متوازی الاضلاع کے چار ضلعوں اور اس کے دو وتروں کی
قطبی مساواتیں دریافت کرو۔

(۱۸) ثابت کرو کہ خطوط مستقیم لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ + لا^۲ - لا^۲ اور

$$ل لا + م م + ن ن = ۵۴ \text{ جوشٹ بنتا ہے اس رقبہ} = \frac{ن لا + م م + ب ب}{۲} - \frac{ل لا + م م + ب ب}{۲}$$

دائرہ کی مساواتیں

۵۸ (۱)۔ دائرہ کی مساوات علی القیاس محجوروں کے حوالہ سے

فرض کر دو شکل E میں دائرہ کا مرکز O ہے اور F اس کے محیط پر کوئی سا نقطہ ہے۔ J کے محدود اور B مانو اور F کے محدود D اور A ۔ دائرہ کا نصف

قطر ص فرض کرو۔ ج م ،
ف ن محور و ما کے متوازی
کھینچو اور ج ک محور و لا کے
متوازی تہ

ج ک ف
ج ف لیکن ج ک = لا۔ ع
اور ک ف = ما۔ بہ

$$\therefore (1-a) + (a-b) = 1$$

یہ دائرہ کی مطلوبہ مساوات ہے۔

اگر محمدؐ دلوں کا مہبدا، خود مرکزِ دائرہ مانا جائے تو عہ اور بہ دونوں صفر ہونگے اور مساوات حسب ذیل ہوگی۔

$$لا + ۲ = ص \dots \dots \dots (۲)$$

مساوات (۱) کو پھیلانے سے $لا + ۲ = ۲ - لا - ۲$ یہ $لا + ۲$

$+ ۲ = ص$ ہو جاتی ہے۔ اور یہ $لا + ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ج = ۰ \dots \dots (۳)$ کی ہم شکل ہے جس میں گ، ف اور ج مستقل ہیں۔

پس مساوات (۳) دائرہ کی عام مساوات مانی جاتی ہے۔ اس لیے

کہ وہ یہ صورت

$$(لا + گ) + (ما + ف) = گ + ۲ + ف - ج$$

اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ مساوات (۳) کے طریق پر اگر کوئی

سانقہ لیا جائے تو نقطہ (گ، ف) سے اس کا فاصلہ مستقل اور

لاگ + ف - ج کے مساوی ہوتا ہے۔ پس مساوات مذکور ایسے

دائرہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا مرکز نقطہ (گ، ف) ہے اور نصف

قطر $لاگ + ۲ + ف - ج$ ہے۔

اگر گ + ف - ج = ۰ تو نصف قطر صفر ہے اور دائرہ ایک نقطہ

دائرہ کہلاتا ہے۔

اگر گ + ف - ج منفی ہو تو لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں اس دائرہ

کے لیے صادق نہ آئیں گی اس لیے وہ دائرہ خیالی کہلائیگا۔

امور مندرجہ بالا سے واضح ہے کہ دوسرے درجہ کی کوئی سی مساوات

دائرہ کو تعبیر کرے گی بشرطیکہ

(۱) لا اور ما کے سر مساوی ہوں اور (۲) اس مساوات میں حاصل

ضرب لا مار کھنے والی کوئی رقم شامل نہیں ہے۔

چونکہ دائرہ کی عام مساوات میں تین مستقل ہیں اس لیے اگر تین

دیے ہوئے نقطوں میں سے گزرنے والی یا کوئی دوسرے شرائط

کو پورا کرنے والی دائرہ کی مساوات معلوم کرنا ہو تو مصرعہ بالا مساوات

کو فرض کر کے دیے ہوئے شرائط کے لحاظ سے گ، ف، ج مستقلوں

کی قیمتیں دریافت کر لی جاتی ہیں۔

(ب) منحنی کے حماس اور عماد۔ فرض کرو کہ کسی منحنی پر کبھی دو نقطے

ف، ق لیے جاتے ہیں اور ق منحنی پر حرکت کر کے ف کے قریب تر ہوتا جاتا ہے اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے تب خط ف ق اس انتہائی وضع میں منحنی کا نقطہ ف پر کا حماس کہلاتا ہے۔

اور ف پر جو خط اس حماس کے علی القواکم کھینچا جاتا ہے منحنی کا اس نقطہ پر کا عماد کہلاتا ہے۔

(۱) دائرہ لا^۱ + ما^۱ = ص^۱ کے کسی نقطہ پر کے خط حماس کی

مساوات معلوم کرنے کے لیے فرض کرو کہ اس پر کے دو نقطوں کے محمد لا^۱، ما^۱ اور لا^۲، ما^۲ ہیں۔ ان میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا}^۱ - \text{لا}^۲}{\text{لا}^۱ - \text{ما}^۱} = \frac{\text{ما}^۱ - \text{ما}^۲}{\text{ما}^۱ - \text{ص}^۱} \quad (۱)$$

چونکہ یہ دونوں نقطے دائرہ پر واقع ہیں لہذا لا^۱ + ما^۱ = ص^۱

اور لا^۲ + ما^۲ = ص^۲

$$\therefore \text{پس لا}^۱ - \text{لا}^۲ = (\text{ما}^۱ - \text{ما}^۲) \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے جملوں کو آپس میں ضرب دے تو

$$(\text{لا}^۱ - \text{لا}^۲)(\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲) = (\text{ما}^۱ - \text{ما}^۲)(\text{ما}^۱ + \text{ما}^۲) \quad (۳)$$

اب لا^۱، ما^۱ کو دائرہ پر لا^۲، ما^۲ کے قریب تر ہٹاتے جاؤ یہاں تک کہ وہ بالآخر لا^۱، ما^۱ سے منطبق ہو جائے۔

تب اس انتہائی وضع میں دو نقطہ لا^۱، ما^۱ پر کا خط حماس بن جاتا ہے پس مساوات (۳) میں لا^۱ = لا^۲ اور ما^۱ = ما^۲ لکھنے سے نقطہ لا^۱، ما^۱ پر کے حماس کی مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ یعنی

$$(\text{لا}^۱ - \text{لا}^۱)(\text{لا}^۱ + \text{لا}^۱) = (\text{ما}^۱ - \text{ما}^۱)(\text{ما}^۱ + \text{ما}^۱)$$

$$\text{یا لا}^۱ + \text{لا}^۱ = \text{ما}^۱ + \text{ما}^۱ = \text{ص}^۱ \quad \therefore \text{لا}^۱ + \text{ما}^۱ = \text{ص}^۱$$

اگر دائرہ کی مساوات لا^۱ + ما^۲ + گ^۳ لا^۱ + ف^۲ + ج^۳ = ۰ مانی جائے تو پہلے کی طرح لا^۱، ما^۲ اور لا^۱، لم نقطوں میں سے گزرنے والے قاطع کی مساوات

$$\frac{\text{لا} - \text{لا}^۱}{\text{لا} - \text{لا}^۱} = \frac{\text{ما} - \text{ما}^۱}{\text{ما} - \text{ما}^۱} \dots \dots \dots (۱) \text{ ہوگی}$$

اور چونکہ یہ نقطے دائرہ پر ہیں لہذا لا^۱ + ما^۲ + گ^۳ لا^۱ + ف^۲ + ج^۳ = ۰
لا^۱ + ما^۲ + گ^۳ لا^۱ + ف^۲ + ج^۳ = ۰

∴ (لا - لا^۱) (لا^۱ + لا^۲ + گ^۳) = - (ما - ما^۱) (ما^۱ + ما^۲ + ف^۳) (۲)

(۱) اور (۲) مساواتوں کے متناظر پہلوؤں کے جلوں کو باہدیکر ضرب دینے سے قاطع کی مساوات

(لا - لا^۱) (لا^۱ + لا^۲ + گ^۳) = - (ما - ما^۱) (ما^۱ + ما^۲ + ف^۳)
برآمد ہوتی ہے۔

پس نقطہ لا^۱، ما^۲ پر کے خط مماس کی مساوات (لا - لا^۱) (لا^۱ + گ^۳) + (ما - ما^۱) (ما^۱ + ف^۳) = ۰ ہے

یعنی لا^۱ + ما^۲ + گ^۳ لا^۱ + ف^۳ + ج^۳ = لا^۱ + ما^۲ + گ^۳ لا^۱ + ف^۳ + ج^۳ + ج^۳ اضافہ کرو۔
اب مساوات کے دونوں جانب گ^۳ لا^۱ + ف^۳ + ج^۳ اضافہ کرو۔

چونکہ لا^۱، ما^۲ دائرہ پر واقع ہے لہذا مماس کی مساوات

لا^۱ + ما^۲ + گ^۳ (لا^۱ + لا^۲) + ف^۳ (ما^۱ + ما^۲) + ج^۳ = ۰ ہو جاتی ہے جس سے واضح ہے کہ

دائرہ کے کسی نقطہ لا^۱، ما^۲ پر کے خط مماس کی مساوات 'دائرہ کی مساوات

میں لا^۱ کے عوض لا^۱، ما^۲ کے عوض ما^۲ لا کے عوض (لا + لا^۱) اور

ما کے عوض (ما + ما^۱) لکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۲) دائرہ کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات - فرض کرو

دائرہ لا^۱ + ما^۲ = ص^۲ پر نقطہ لا^۱، ما^۲ واقع ہے۔ اس نقطہ پر کے خط مماس کی

مساوات لا^۱ + ما^۲ = ص^۲ ہے اور جو کوئی خط اس مماس کے علی التواء

ہو گا اس کی مساوات = ما^۲ - لا^۱ + ما^۲ = ۰ جس میں ص مستقل ہے۔

جب نقطہ لا، ما، اس خط پر واقع ہوتا ہے تو

$$\text{لا، لا} - \text{لا، ما} + \text{ما} = 0 \quad \text{یعنی } \text{ما} = 0$$

پس دائرہ کے نقطہ لا، ما پر کے عمود کی مساوات ما، لا - لا، ما = 0 ہے
اس مساوات سے ظاہر ہے کہ دائرہ کا عمود مبداء میں سے گزرتا ہے

یعنی مرکز میں سے۔

(ج) ایک دیے ہوئے خط مستقیم اور دائرہ کے تقاطع

کے نقطوں کی قیمتیں۔

دائرہ کی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ص^۲ مانو اور خط مستقیم کی مساوات
ما = مر لا + ج جو نقطے خط مستقیم اور دائرہ کے مشترک ہونگے ان کے لیے یہ
دونوں مساواتیں صادق آئیں گی۔ پس چونکہ خط مستقیم کی مساوات
ما = (مر لا + ج) لکھی جاسکتی ہے لہذا ان مشترک نقطوں کے لیے

$$\text{ما} = (\text{مر لا} + \text{ج}) \quad \text{ما} = \text{ص} - \text{لا}$$

$$\text{یعنی لا}^2 + (\text{مر لا} + \text{ج})^2 = \text{ص}^2 - 2\text{مر لا} + \text{لا}^2 \quad \dots \dots (۱)$$

یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں حقیقی اور مختلف حقیقی اور
مساوی یا خیالی ہوں گی۔

پس لاکھ دو قیمتیں ہوں گی اور ان کو مساوات ما = مر لا + ج میں
یہ قیمتیں درج کرنے سے ماکہ بھی دو قیمتیں برآمد ہوں گی۔ اس لیے ہر خط مستقیم
دائرہ سے دو حقیقی اور امتیاز پذیر نقطوں میں یا دو منطبق نقطوں میں یا دو
خیالی نقطوں میں ملتا ہے۔ خیالی نقطوں سے مراد وہ نقطے ہیں جن کے محدود
خیالی ہیں۔

مساوات (۱) کی اصلیں باہم دیگر مساوی ہوں گی اگر

$$\text{لا}^2 + (\text{مر لا} + \text{ج})^2 = (\text{مر لا} - \text{لا})^2 \quad \text{مر لا} + \text{ج} = \text{مر لا} - \text{لا}$$

$$\text{یعنی اگر} \quad \text{ج} = \text{ص} - 2\text{مر لا} \quad (۲)$$

جب لاکھ دو دونوں قیمتیں مساوی ہوں گی تو ماکہ دو دونوں قیمتیں بھی باہم دیگر

مساوی ہوگی۔

اس لیے خط $MA = MR + AJ$ اور دائرہ $LA + MA = MS$ کے تقاطع کے نقطہ منطبق ہونگے اگرچہ $MS = (MA + MR)$ ۔ پس خط مستقیم $MA = MR + MS$ یا $MA + MR$ دائرہ $LA + MA = MS$ کو مرکز کی جہت میں تقسیم کرے گا۔

چونکہ $MA + MR$ کی علامت مثبت یا منفی مانا جاسکتی ہے اس لیے مرکز کی ہر سمت کے لیے دائرہ کے دو خطوط MA ہونگے یعنی کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی دائرہ کے دو مماسی خط ہوتے ہیں۔

(د) دائرہ کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں کے طریق کی تعیین۔

مرکز دائرہ کو مبداء اور محور OK کو وتروں کا متوازی مانو۔ تب دائرہ کی مساوات $LA + MA = MS$ ہوگی اور وتروں کے نظام میں سے کسی ایک وتر کی مساوات $MA - J = MS$ لی جاسکتی ہے جہاں یہ دونوں ملینگے وہاں $LA + J = MS$ ، $LA = MS - J$ ۔

چونکہ LA کی یہ دونوں قیمتیں مساوی اور مخالف ہیں اس لیے یہ نتیجہ مرتب ہوتا ہے کہ وتر کے وسطی نقطہ کا فصل یا مقطوعہ صفر ہوتا ہے یعنی یہ وسطی نقطہ ہمیشہ محور پر واقع ہوتا ہے۔ J کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگرچہ MS تو LA کی دونوں قیمتیں خیالی ہوتی ہیں لیکن برہنہسمان کا حاصل جمع صفر ہی ہوتا ہے۔ اور اس لیے وتر کا وسطی نقطہ اس صورت میں بھی محور پر واقع ہوتا ہے۔

پس دائرہ کے متوازی وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خط مستقیم ہے جو مرکز سے ان پر علی القوائم کھینچا جاتا ہے۔ یہ ضروری نہیں کہ اس طریق کو صرف اس کے اس جز تک محدود سمجھیں جو دائرہ کے اندر واقع ہے۔ (د) اب تک صرف دائرہ کی عام تعریف کو (یعنی یہ کہ اس کے مرکز سے اس کے محیط کے کسی بھی نقطہ کا فاصلہ مستقل ہے) مان کر نتائج حاصل

کیے گئے۔ اس کی کسی چندسی خاصیت سے مد نہیں لی گئی۔ اگر ان سے استفادہ کیا جائے تو بعض نتائج زیادہ آسانی کے ساتھ برآمد ہو سکتے ہیں۔ مثلاً دائرہ پر کسی نقطہ کے خط مماس کی مساوات کے لیے دائرہ کی اس خاصیت سے مدد لی جاسکتی ہے کہ وہ اس نقطہ کو مرکز سے ملانے والے خط پر علی القوائم ہے۔ چنانچہ آخر الذکر خط کی مساوات $\frac{y}{b} = \frac{x}{a}$ ہے۔ بے جس میں a, b دائرہ پر کے کسی نقطہ کے محدد ہیں۔ اور اس کے علی القوائم خط کی مساوات جو a, b میں سے گزرتا ہے $ay + bx = a^2 + b^2$ ہے۔

ایک دوسری مثال کے طور پر یہ معلوم کرنے کے لئے کہ خط $ax + by = c$ دائرہ $x^2 + y^2 = r^2$ کو کسی شرط کے تحت مس کرے گا۔ ہم دائرہ کی اس چندسی خاصیت کو کام میں لاسکتے ہیں کہ ایسی صورت میں دیے ہوئے خط کا فاصلہ مرکز سے نصف قطر کے مساوی ہوتا ہے۔

پس شرط یہ ہے کہ $\pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ فاصلہ c کے مساوی ہو یعنی

$c = \pm r \sqrt{a^2 + b^2}$
(ھ) کسی بھی نقطہ سے دائرہ کے دو خط مماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی ہونگے اگر نقطہ دائرہ کے باہر ہوگا، منطبق اگر نقطہ دائرہ پر ہوگا اور خیالی اگر نقطہ دائرہ کے اندر ہوگا۔

دائرہ کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ میں a, b کو کسی بھی نقطہ کے محدد اور c فرض کرو۔ اگر a, b دائرہ پر کے کسی بھی نقطہ کے محدد مانے جائیں تو اس نقطہ پر کے مماس کی مساوات

$$ax + by = a^2 + b^2$$

یہ خط مماس نقطہ (a, b) میں سے گزرے گا اگر $a^2 + b^2 = r^2$ (۱)
چونکہ (a, b) دائرہ پر واقع ہے اس لیے $a^2 + b^2 = r^2$ (۲)

پس ان دو مساواتوں سے دائرہ کے ان نقطوں کے لیے لا، اور لا

کی قیمتیں معلوم ہو جاتی ہیں جن پر کے تماس دیے ہوئے نقطہ (عہ، بہ) میں سے گزرتے ہیں۔ مساوات (۲) میں لا کے عوض $\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص}$ لکھو تو

$$لا (عہ + بہ) - ۲ ص = ص + ص (ص - بہ) = ص \dots (۳)$$

اس سے ان نقطوں کے فاصلے معلوم ہو جاتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۳)

دو درجی ہے اس لیے دائرہ کے دو تماس نقطہ (عہ، بہ) میں سے

گزرینگے۔

مساوات (۳) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگی بہ لحاظ اس کے کہ

$$ص - ۲ = ص (ص - بہ) (عہ + بہ) \text{ صفر سے زیادہ اس کے}$$

مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ یعنی بہ لحاظ اس کے کہ $ص - ۲ = ص$ صفر سے

زیادہ، اس کے مساوی یا اس سے کمتر ہو۔ جس کے معنی یہ ہوتے کہ نقطہ (عہ، بہ)

دائرہ کے باہر ہے، اس پر ہے یا اس کے اندر ہے۔

(و) کسی نقطہ سے دائرہ پر خطوط تماس کھینچے جاتے ہیں

اے کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات۔

جس نقطہ سے خطوط تماس کھینچے جاتے ہیں اس کے محدود لا، لا

فرض کرو۔ تماس کے نقطوں کے محدود کو عہ، بہ اور عہ، بہ ملاحظہ کرو

دائرہ کی مساوات لا + لا = ص فرض کرو۔

خطوط تماس کی مساواتیں لا + لا = ص اور لا + لا = ص ہونگی۔

چونکہ یہ دونوں خطوط تماس نقطہ لا، لا میں سے گزرتے ہیں اس لیے

ان کی مساواتیں ان محدودوں کے لیے بھی صحیح ہونگی۔

$$لا + لا = ص \dots (۱) \text{ اور لا + لا = ص} \dots (۲)$$

لیکن (۱) اور (۲) مساواتیں اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں

(عم، ہم) اور (عم، ہم) محدود والے نقطے ایسے خط مستقیم پر واقع ہو سکتے ہیں جس کی مساوات

$$لا + لا + ما + ما = ص \dots \dots \dots (۳)$$

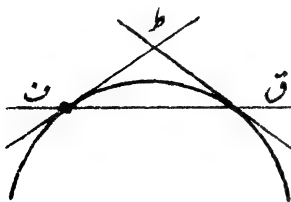
پس مساوات (۳) ایسے خط مستقیم کی مساوات ہے جو نقطہ لا، ما سے
دائرہ پر کھینچے ہوئے خطوط مماس کے تماس کے دونوں نقطوں میں سے گزرتا ہے۔
اگر دائرہ کی مساوات لا + ما + ما + ما + گ + لا + ف + ج = ۰ لی جائے
تو مصرعہ بالا طریقہ پر تبا یا جاسکتا ہے کہ لا، ما نقطہ سے کھینچے ہوئے خطوط
مماس کے تماس کے نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات

$$لا + لا + ما + ما + گ + (لا + لا) + ف + (ما + ما) + ج = ۰$$

جب نقطہ لا، ما دائرہ کے باہر ہوتا ہے تو دونوں خطوط مماس
حقیقی ہوتے ہیں اور محدود عم، ہم اور عم، ہم حقیقی۔ اور جب لا، ما دائرہ
کے اندر ہوتا ہے تو دونوں خطوط مماس خیالی ہوتے ہیں لیکن اس صورت
میں بھی وہ خط جس کی تعبیر مساوات (۳) سے ہوتی ہے ایک حقیقی خط ہوتا ہے
بشرطیکہ لا، اور ما حقیقی ہوں۔ پس ایک حقیقی خط دائرہ کے اندر کے کسی
نقطہ سے دایرہ پر کھینچے ہوئے خیالی خطوط مماس کے خیالی نقاط تماس
کو ملاتا ہے۔

دائرہ کے لحاظ سے قطب اور قطبی کی تعریف کسی نقطہ سے ایک

دائرہ پر جو حقیقی یا خیالی خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں ان کے تماس کے نقطوں
میں سے گزرنے والے خط مستقیم اس نقطہ کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطبی کہلاتا ہے۔



شکل ۲۱

کسی خط مستقیم اور ایک دائرہ کے حقیقی یا خیالی
نقاط تقاطع پر کے خطوط مماس کے تقاطع کا نقطہ اس
خط مستقیم کا اس دائرہ کے لحاظ سے قطب کہلاتا ہے۔
اشکل ۲۱ میں نقطہ ط دیے
ہوئے دائرہ کے لحاظ سے خط ف ق

کا قطب ہے۔ اور خط ف ق دائرہ کے محاط سے نقطہ ط کا قطبی ہے۔ جب نقطہ ق دائرہ پر حرکت کرتا ہوا ف کی طرف کو جاتا اور بالآخر اس سے منطبق ہوتا ہے تو واضح ہے کہ خط ط حماس ط ف اور ط ق بھی بالآخر ایک دوسرے کے ساتھ اور طرف ق سے منطبق ہو جاتے ہیں۔ اس کے یہ معنی ہوں گے کہ جب نقطہ ط دائرہ پر واقع ہوتا ہے تو ط کا قطبی ط پر کے خط حماس کے ساتھ منطبق ہوتا ہے۔ قطبی کی مسادات چونکہ خط حماس کی مسادات کی ہم شکل ہے اس لیے تحلیلی نقطہ نظر سے بھی یہ نتیجہ مترتب ہوتا ہے کہ دائرہ پر کے نقطہ کا قطبی اس نقطہ پر کا خط حماس ہے۔

(ز) اگر کسی نقطہ ف کا قطبی کسی دوسرے نقطہ ق میں سے گزرے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرے گا۔

فرض کرو ف کے محدود لاء ما ہیں اور ق کے محدود لاء ما اور دائرہ کی مسادات لاء ما = صا ہے تب ف اور ق کے قطبیوں کی مسادات علی الترتیب -

لا لا + ما ما - صا = ۰ (۱) اور لا لا + ما ما - صا = ۰ (۲)

ہیں۔

اگر نقطہ ق نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہو تو مسادات (۱) محدود لاء ما کے ساتھ بھی درست ہوگی۔ یعنی

$$\text{لا لا} + \text{ما ما} - \text{صا} = ۰$$

نقطہ ف نقطہ ق کے قطبی پر واقع ہو تو اس صورت میں بھی یہی مسادات حاصل ہوتی ہے پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ ف کا قطبی جب ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔

اگر ایک نقطہ ق کسی ثابت خط مستقیم پر واقع ہے اور ف اس خط کا قطب ہے۔ تب ق کا قطبی ف میں سے گزرنا چاہیے اس لیے کہ مفروضہ میں مان لیا گیا ہے کہ ف کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے۔
اس کے بالعکس اگر کسی ثابت نقطہ ف میں سے کوئی خط مستقیم کھینچا جائے اور نقطہ ق اس خط کا قطب ہو تو چونکہ ف، ق کے قطبی پر واقع ہے ق ہمیشہ ایک ثابت خط مستقیم پر واقع ہونا چاہیے جو ف کا قطبی ہو۔
لہذا دونقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ سر پر ملتے ہیں

تو سرخط مستقیم ف، ق کا قطب بھی گا۔
چونکہ سر نقطہ ف کے قطبی پر واقع ہے اس لیے سر کا قطبی ف میں سے گزرتا ہے۔ اسی طرح سر کا قطبی ق میں سے گزرتا ہے پس واضح ہے کہ اس کا قطبی خط مستقیم ف، ق ہونا چاہیے۔

(ح) کسی دیے ہوئے نقطہ کے دائرہ کے لمحاظ سے قطبی کا مندرسی عمل۔

دائرہ کی مساوات $لا^۲ + ما^۲ = ص^۲$ مانو اور فرض کرو کہ ف کوئی سا نقطہ ہے جس کے محدد لا، ما ہیں۔ اس نقطہ کے قطبی بلحاظ دائرہ کی مساوات $لاا + ماما - ص = ۰$ ف کو مرکز دائرہ سے ملانے والے خط مستقیم کی مساوات $\frac{لا}{لا} - \frac{ما}{ما} = ۰$ ہے۔

ان دونوں مساواتوں پر غور کرنے سے معلوم ہو گا کہ یہ باہمی دیگر علی القواکم خطوط کی مساواتیں ہیں۔ پس کسی نقطہ کا قطبی بلحاظ دائرہ اس نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملانے والے خط پر علی القواکم ہے۔
شکل ۲۲ میں اگر دعو نقطہ و سے اس کے قطبی پر عمود ہے

$$تو و = \frac{ص^۲}{لا^۲ + ما^۲}$$

اور وف = مال^۱ + مال^۲

∴ وع × وف = م^۲

پس ف کا قطبی

بمطابق دائرہ کھینچنے کے لیے

وف کو ملاؤ اور اس کو دائرہ

کو نقطہ ۱ پر قطع کرنے دو۔

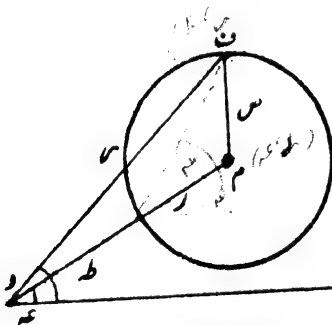
پھر خط وف پر ایک ایسا

نقطہ ع لو کہ

وف : و^۱ :: و^۲ : وع (یعنی ف کا بمطابق دائرہ محکوس نقطہ دریافت کرو)۔

ع میں سے وف کے علی القراءت خط مستقیم کھینچو۔ یہ خط نقطہ ف کا قطبی ہوگا۔

(ط) دائرہ کی قطبی مساوات - فرض کرو م دائرہ کا مرکز ہے۔



شکل ۲۳

م کے قطبی محدودوں کو ر اور ع

مانو۔ دائرہ پر کوئی سا نقطہ ف

لے کر اس کے قطبی محدودوں کو س اور

طہ فرض کرو۔

تب از روئے ہندسہ

م ف^۲ = م^۲ + وف^۲ - ۲ م وف × وف جم م وف

چونکہ م ف = م^۲، و م = ر، ف = س، زاویہ کاوم = عہ اور زاویہ کاوف = طہ

لہذا م^۲ = ر^۲ + س^۲ - ۲ ر س جم (طہ - عہ) (۱)

یہی دائرہ کی قطبی مساوات ہے۔

اگر مبداء دائرہ کے محیط پر ہو تو $س = ۲$ ص جم (طہ۔ عم) (۲)
اگر علاوہ بریں حوالہ کا خط مستقیم ولا مرکز میں سے گزرتا ہے
تو $ع =$ صفر اور دائرہ کی مساوات

$س = ۲$ ص جم طہ (۳)

مساوات (۱) کو بشکل $س = ۲$ ص جم طہ + $ر$ ص = برتیب۔

یہ مساوی دو درجی مساوات ہے۔ اگر $س$ و $ر$ اس کی اسیں قرار دی جائیں تو

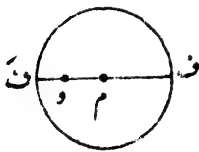
$س = ۲$ ص (۴)

پس حاصل ضرب $س$ و $ر$ زاویہ طہ کے غیر تابع ہے جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر کسی ثابت نقطہ سے ایک خط مستقیم کھینچا جائے جو کسی دیے ہوئے دائرہ کو قطع کرتا ہے تو اس خط کے تقاطعات کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

اگر مبداء و دائرہ کے اندر واقع ہو تو نصف قطر ص سے چھوٹا ہوتا ہے۔ پس $س$ و $ر$ کی علامتیں مختلف ہونی چاہئیں یعنی مبداء سے ایک دوسرے کے مخالف سمتوں میں کھینچی گئی ہونگی جیسا کہ شکل ۲۲ سے واضح ہے۔

و ف = ص + ر و ف = - (ص - ر)

و ف x و ف = - (ص - ر)



(دی) قائم متقاطع دائرے۔

شکل ۲۲

لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = -

اور لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = -

دو دائروں کے باہر یکسر علی القوائم متقاطع ہونگی شرط کی تعیین

ان دائروں کے مرکز علی الترتیب (گ، ف، ج) اور (گ، ف، ج) نقطے ہیں۔ اور ان کے نصف قطروں کے مربع گ^۲ + ف^۲ - ج^۲ اور گ^۲ + ف^۲ - ج^۲ ہیں۔
یہ ایک دوسرے کو علی القوائم قطع کرینگے اگر ان کے مرکزوں کے درمیانی فاصلہ کا مربع ان کے نصف قطروں کے مربعوں کے حاصل جمع کے مساوی ہو گا۔

پس شرط مذکور یہ ہے کہ (گ، ف، ج) + (ف، ج، گ) = (گ، ج، ف) + (ج، ف، گ) + (ف، گ، ج) + (ج، گ، ف)

یعنی گ^۲ + ف^۲ - ج^۲ + ف^۲ - ج^۲ - ج^۲ = ج^۲ + ف^۲ - گ^۲ + ج^۲ + گ^۲ - ف^۲ + ج^۲ + گ^۲ - ف^۲ - ج^۲ = ۰
[طریقہ دیکھو۔ چونکہ کسی مشترک نقطہ (لا، ما) پر کے خطوط مماس حسب ذیل ہیں:-

لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰

لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰

یہ ایک دوسرے کے علی القوائم ہیں اگر (لا، گ) (لا، ف) (ما، گ) (ما، ف)

+ (ما، ج) + (لا، ج) = (ما، گ) + (لا، گ) + (ما، ف) + (لا، ف) + (ما، ج) + (لا، ج) + (ما، گ) + (لا، گ) + (ما، ف) + (لا، ف) + (ما، ج) + (لا، ج) = ۰

یعنی لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰

لیکن چونکہ (لا، ما) دونوں دائروں پر ہے اس لیے

لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰

اور لا، لا + ما، ما + گ، گ (لا + لا) + ف، ف (ما + ما) + ج، ج = ۰

مساوات (۱) کو ۲ سے ضرب دے کر اس میں سے (۲) اور (۳) مساواتوں کے حاصل جمع کو خارج کر دو تب

گ، گ + ف، ف - ج، ج = ۰

رگ کسی دیے ہوئے نقطہ سے ایک دائرہ پر کھینچے ہوئے
خط مماس کے طول کی تعیین۔

اگر دیا ہوا نقطہ ط ہے اور اس سے م مرکز والے دائرہ پر کھینچے ہوئے
دو خطوط مماس میں سے ط ایک خط مماس ہے تو ہندسہ کی رو سے ظاہر
ہے کہ زاویہ م ف ط ایک زاویہ قائمہ ہے۔ پس

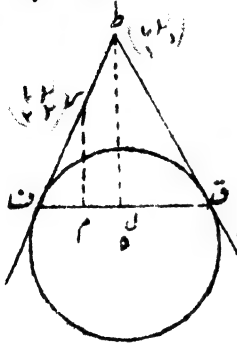
ط ف \perp م ط - م ف \perp (۱)
دائرہ کی مساوات فرض کرو (لا - عہ) \perp (ما - بہ) \perp - ص \perp = (۲) ہے
اگر ط کے محدود لا، ما ہیں تو م ط \perp = (لا - عہ) \perp + (ما - بہ) \perp
پس مساوات (۱) سے ط ف \perp = (لا - عہ) \perp + (ما - بہ) \perp - ص \perp (۳)
یعنی (لا، ما) سے کھینچے ہوئے مماس کا طول، مساوات (۲) میں لا، ما
کے عوض لا، ما لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

پس اگر دائرہ کی مساوات لا \perp + ما \perp + گ \perp لا + ۲ ف + ۱ ج =
فرض کی جائے اور اس میں کسی دے ہوئے نقطہ کے محدود درج کیے جائیں تو مساوات
کی سیدھی طرف کا جملہ اس نقطہ سے دائرہ پر کھینچے ہوئے خط مماس کے
طول کے مربع کے مساوی ہو گا۔ اور چونکہ یہ مربع اس نقطہ سے دائرہ کو قطع
کرنے والے خطوط کے قطعات کے حاصل ضرب کے مساوی ہے اس لیے جملہ
مذکور سے اس حاصل ضرب کی قیمت بھی معلوم ہو جائیگی جب نقطہ دائرہ
کے اندر ہو گا تو واضح ہے کہ یہ حاصل ضرب اور مماس کا طول خیالی ہونگے۔
اگر دائرہ کی مساوات لا \perp + ما \perp + گ \perp لا + ۲ ف + ۱ ج = ہو تو اس کی
ط پر تعین کر کے اس میں دیے ہوئے نقطہ کے محدود درج کر کے اس نقطہ
سے کھینچے ہوئے خط مماس کے طول کا مربع حاصل ہو گا۔

مثال۔ دائرہ لا \perp + ۲ = ص \perp پر کسی بھی نقطہ سے کھینچے ہوئے

ماسوں کے جفت کی مساواتیں

فرض کر دو نقطہ لا، ما سے دائرہ کے دو ماس، ط ف اور ط ق کھینچے گئے ہیں۔ ان ماسوں میں سے کسی ایک ماس (بالفرض



ط ف) پر سے ایک نقطہ لو اور خط ط ق پر عمود
طل اور عمود سے م گراؤ۔

مشابہ مثلثوں کی رو سے

ط ف : م س = ط ل : م س
ط کے قطبی ف ق کی مساوات

لا + لا = ما + ما = ص ہے۔

شکل ۲۵

پس اگر سر کے مجدد لا، ما مانے جائیں تو

$$\left\{ \frac{\frac{ط ل}{ص م}}{\frac{لا + لا}{ص م}} \times \frac{لا + لا}{ص م} \right\} = \frac{ط ل}{ص م}$$

$$\text{یعنی } \frac{ط ل}{ص م} = \frac{لا + لا}{ص م}$$

اور چونکہ ط ف اور س ف علی الترتیب نقطہ (لا، ما) اور نقطہ (لا، ما) سے دائرہ پر کھینچے ہوئے ماس ہیں اس لیے ان کے لمول بالترتیب
لا + لا = ص م اور لا + لا = ص م ہیں۔ پس

$$\frac{ط ف}{ص م} = \frac{لا + لا}{ص م} \quad \text{لہذا مساوات (۱) کی رو سے}$$

$$\frac{لا + لا}{ص م} = \frac{لا + لا}{ص م}$$

یعنی (لا + لا = ص م) (لا + لا = ص م)۔ (لا + لا = ص م) = ص م

پس کوئی ساقطہ جو دلے ہوئے یعنی (لا، ما) محدودوں والے نقطہ سے

دائرہ پر کھینچے ہوئے دو ماسوں میں سے کسی ایک ماس پر واقع ہو گا اس کی مساوات (لا + ما - ص) (لا + ما - ص) - (لا + لا + ما - ص) = ۰ ہے لہذا لا + ما سے دائرہ پر کھینچے ہوئے دو ماسوں کی مساوات یہی ہے۔

(ل) دو دائروں کا بنیادی محور۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب لا + ما + مگ + لا + ف + ما

$$+ ج = ۰ \dots \dots \dots (۱)$$

اور لا + ما + مگ + لا + ف + ما + ج = ۰ \dots \dots \dots (۲) ہیں۔

تو واضح ہے کہ کسی ایسے نقطہ کے محدود جو مساوات (۱) اور نیز مساوات

(۲) کے دائروں پر واقع ہو مساوات لا + ما + مگ + لا + ف + ما + ج

$$= لا + ما + مگ + لا + ف + ما + ج \dots \dots \dots (۳) کی تصدیق کریں گے۔$$

پس مساوات (۳) ایک ایسے طریق کو تعبیر کرتی ہے جو دیے ہوئے

دو دائروں کے مشترک نقطوں میں سے گزرتا ہے۔ یہ مساوات

$$۲(مگ - گ) + لا + ۲(ف - ف) + ما + ج - ج = ۰ \dots \dots \dots (۴)$$

میں تحویل ہوتی ہے جو پہلے درجہ کی ہونے کی وجہ سے ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

یہ دو دائرے اگر حقیقی نقطوں میں ایک دوسرے کو قطع نہ کریں تو

بھی مساوات مندرجہ بالا سے جس خط مستقیم کی تعبیر ہوتی ہے وہ ہر صورت میں

حقیقی ہے بشرطیکہ گ، ف، ج اور مگ، ف، ج حقیقی ہوں۔

مساوات (۳) کی ایک اور بھی تعبیر ہو سکتی ہے۔

کسی دائرہ مساوات (۱) میں جس میں لا کا سر اکائی ہے اگر لا، ما کی

جگہ کسی ایک نقطہ کے محدود درج کیے جائیں تو اس کی سیدھی جانب کا جملہ

اس ماس کے مربع کے مساوی ہے جو اس نقطہ سے دائرہ تک کھینچے جاتے

ہیں۔ پس اگر لا، ما خط مساوات (۳) پر کے کسی بھی نقطہ کے محدود ہوں تو

اس مساوات کی سیدھی جانب کا جملہ اس نقطہ سے دائرہ (۱) تک

کھینچے ہوئے خط مماس کے مربع کے مساوی ہو گا اور اس مساوات کی بائیں جانب کا جملہ اس نقطہ سے دائرہ (۲) تک کھینچے ہوئے خط مماس کے مربع کے مساوی ہو گا۔

پس خط مساوات (۳) کے کسی نقطہ سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماس باہر دیگر مساوی ہیں۔

تعریف۔ ایسے خط کو جی دو دائروں کے حقیقی یا خیالی نقاط تقاطع میں سے گزرتا ہے ان دائروں کا بنیادی محو رکھتے ہیں۔

بنیادی محور کی اس طرح بھی تعریف ہو سکتی ہے کہ وہ ان نقطوں کا طریق جن سے دیے ہوئے دو دائروں تک کھینچے ہوئے مماسوں کا طول مساوی ہے جو نیک مساوات (۱) اور (۲) کے دائروں کے مرکزوں کے محدود علی الترتیب (گ-۱، ف-۱) اور (گ-۲، ف-۲) ہیں

ان کو ملانے والے خط کی مساوات $\frac{لا + گ}{گ - ف} = \frac{ما + ف}{ف - ف}$ ہے جو بنیادی محور (مساوات ۴) کے علی القوائم ہے۔

(۴) تین دائروں کے تینوں بنیادی محوروں کے ایک ایک جفت کے لحاظ سے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

$$اگر لا + ما + گ = لا + ف + ما + ج = ۰$$

$$لا + ما + گ = لا + ف + ما + ج = ۰$$

$$اور لا + ما + گ = لا + ف + ما + ج = ۰$$

تین دائروں کی مساواتیں ہیں تو پہلے اور دوسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات $لا + ما + گ = لا + ف + ما + ج = ۰$ ہے۔

اسی طرح پہلے اور تیسرے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج - (لا + ۲ا + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) = ۰ \text{ ہے}$$

اور تیسرے اور پہلے دائرہ کے بنیادی محور کی مساوات

$$لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج - (لا + ۲ا + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج) = ۰ \text{ ہے}$$

ان سے واضح ہے کہ کسی نقطہ کے محدود اگر ان تین مساواتوں میں سے

کسی دو کے لیے صحیح ہونگے تو وہ باقی ماندہ تیسری مساوات کے لیے بھی صحیح ہونگے۔

ان تین بنیادی محوروں کے تقاطع کے نقطہ کو ان تین دائروں کا بنیادی مراکزہ کہتے ہیں۔

(ن) دائروں کے کسی نظام کی مساوات۔

اگر مساوات لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ میں ایک یا اس سے زیادہ سروں کے اندر کوئی اختیاری مستقل شامل ہو تو وہ مساوات

دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کریگی۔ مثلاً لا + ما + ۲ = ۰ میں اگر

ص ایک اختیاری مستقل ہے تو مساوات مذکور ہم مرکز دائروں کے ایک نظام کو تعبیر کرتی ہے جن کے مرکز مبداء پر واقع ہیں۔

اگر دو دائروں کی مساواتیں علی الترتیب لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ (۱)

اور لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ (۲) ہوں تو

مساوات لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ (۳) کا طریق ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے

لا + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰ (۳) اور (۳) کا طریق ہمیشہ ایک دائرہ ہوتا ہے

اس صورت میں کہ جب $مر = ۱$ جیسا کہ پہلے بیان ہو چکا ہے $مر = ۱$ کی صورت میں مساوات مذکور ایک خط مستقیم یعنی دیے ہوئے دائروں کے بنیادی محور کو تقسیم کرتی ہے۔

مساوات (۱) کو ترتیب دینے سے $(۱+مر) لا + (۱+مر) ما$
 $۲+ (گم + مرگم) + ۲(فم + مر فم) + (ج + مر ج) = ۰$ ہوگی
 $(۱+مر) پر تقسیم کرنے سے لا + ما + ۲(گم + مرگم) + ۲(فم + مر فم) + (ج + مر ج) = ۰$

$ج + مر ج = ۰$ جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔
 دائرہ مساوات (۲) کے مرکز کے محدود $(گم + مرگم) + ۲(فم + مر فم) + (ج + مر ج) = ۰$ اور $(۱+مر) پر تقسیم کرنے سے$

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ جو نقطہ دائرہ (۱) اور دائرہ (۲) کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو $مر$ کی نسبت میں تقسیم کرتا ہے اس کے بھی یہی محدود ہیں۔

[جب دائرے لا + ما + ۲گم + ۲فم + ج = ۰ اور لا + ما + ۲گم + ۲فم + ج = ۰ دو نقطوں فم + مر فم میں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں تو باسانی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دائروں کا وہ نظام جس کی مساوات لا + ما + ۲گم + ۲فم + ج + مر (لا + ما + ۲گم + ۲فم + ج) = ۰ بتبیین کرتی ہے ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جو فم اور فم نقطوں میں سے گزرتے ہیں۔]

ہم محور دائرے۔ اگر دو دائروں کے مرکزوں کو ملانے والا خط

لا کا محور مانا جائے اور بنیادی محور کا محور تو مساوات (۳) یہ شکل
 $لا + ما + مر لا + ج = ۰$ لکھی جاسکتی ہے جس میں $مر$ ایک اختیاری مستقل ہے۔
 محور خواہ کیسے ہی منتخب ہوں لا + ما + ۲گم + ۲فم + ج = ۰ اور
 $لا + ما + ۲گم + ۲فم + ج = ۰$

ان دائروں کی عام مساواتیں ہونگی۔ اگر ان کے مرکز محور کا واقع ہو
 توف $= ۰$ اور $f = ۰$ تب بنیادی محور کی مساوات $۲(گ - گم) = ۰$
 $(ج - ج) = ۰$ ہو جاتی ہے۔
 اگر یہ خط محور سے منطبق ہوتا ہے تو چونکہ اس محور کی مساوات
 $۰ = ۰$ ہے لہذا $ج - ج$ صفر کے مساوی ہونا چاہیے یعنی $ج = ج$ پس
 $ج$ اور $ج$ کے عوض $ج$ لکھنے اور $f = ۰$ اور $f = ۰$ لکھنے سے مساوات
 (۱) شکل

$۰ = ۰ + ۲(گ - گم) + ۲(لا - لا) + ۲(ما - ما) + ۲(ج - ج) = ۰$
 تبدیل ہوتی ہے

یعنی $۰ = ۰ + ۲(گ - گم) + ۲(لا - لا) + ۲(ما - ما) + ۲(ج - ج) = ۰$

چونکہ لا کا سر صر کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے اس لیے اس کو صر سے
 تعبیر کر سکتے ہیں پس ان دائروں کی مساوات $۰ = ۰ + ۲(لا - لا) + ۲(ما - ما) + ۲(ج - ج) = ۰$
 ہو جاتی ہے۔

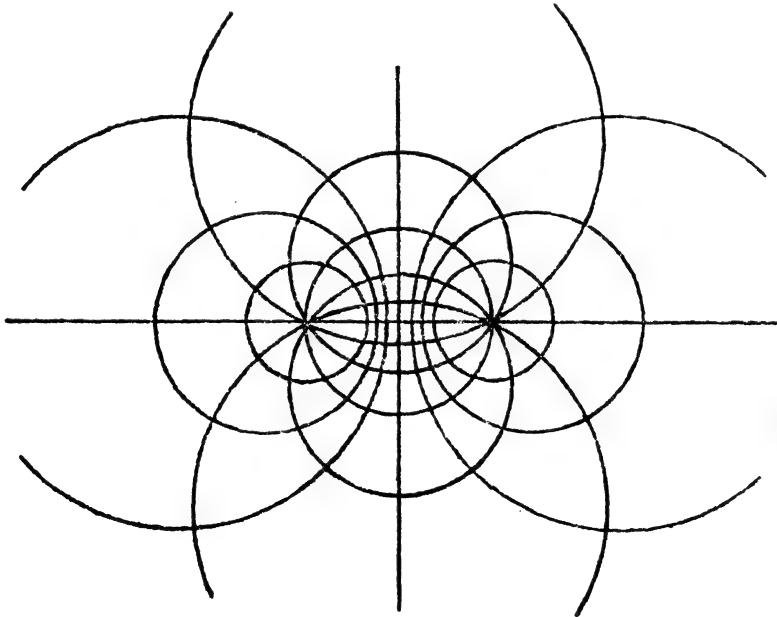
مرکز کو مختلف قیمتیں دینے سے یہ مساوات دائروں کے مختلف جوڑوں
 کو بھی تعبیر کرتی ہے۔ ان تمام دائروں کے مرکز محور کا ہوتے ہیں۔ ان کے
 مرکزوں کے محدود (مرکز) ہیں اور ان کے نصف قطر $۰ = ۰$ مرکز $ج - ج$
 یہ امر کہ آیا یہ دائرے ایک دوسرے کو قطع کر سکتے ہوں یا نہیں
 یا نہیں ملنے کے مرکز اور ج کی قیمتوں پر موقوف ہے۔

(۱) اگر $مرکز = ۰$ تب $ج = ۰$ اور یہ دائرے نقطوں (۱) اور (۲) میں
 میں تحویل ہونگے۔ یہ نقطے ہم محور دائروں کے نظام کے انتہائی نقطے
 کہلاتے ہیں۔

(۲) اگر $ج$ منفی ہے تو یہ ہم محور دائرے حقیقی نقطوں (۱) اور (۲) میں
 اور (۱) اور (۲) میں سے گزرتے ہیں اور ان کے انتہائی نقطے خیالی ہوتے ہیں۔
 (۳) اگر $ج = ۰$ تو یہ دائرے ایک دوسرے کو میعاد پر مس کرتے ہیں۔

(۴) اگر ج مثبت ہو تو یہ دائرے خود ایک دوسرے کو خیالی نقطوں میں منقطع کرتے ہیں۔ ان کے انتہائی نقطے حقیقی ہوتے ہیں اور یہ دائرے $لا + ما = ج$ مساوات والے دائرہ پر علی القوائم ہوتے ہیں۔ (اس لیے کہ دو دائرے علی القوائم ہونے کی شرط $گ + گ + ۲ف + ۲ف = ج$ - ج = ۰ ہے)۔

(س) علی القوائم دائروں کی شرط کا یہ صریح نتیجہ ہے کہ دو ہم محور دائروں کے نظام جن کی مساواتیں $لا + ما + ۲گ + ۲ف = ج$ اور $لا + ما + ۲ف + ۲گ = ج$ ہیں۔ جن میں ج کی قیمت جملہ دائروں کے لیے مساوی ہے ایسے دائروں پر مشتمل ہیں کہ ایک نظام کا کوئی سا دائرہ دوسرے نظام کے جملہ دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ اور ایک نظام کے مشترک نقطے دوسرے نظام کے نقطہائی دائرے ہیں۔



(ع) دائرہ لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج + مر (لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج) = کے کسی نقطے سے دائروں لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج = ... (ب) پر کھینچے

اور لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج = ... (ب) پر کھینچے ہوئے عماسوں کے مربعوں کی نسبت مستقل اور۔ مر کے مساوی ہے۔

اول الذکر دائرہ پر کوئی سانقطہ (لا، ما) فرض کرو۔ تب لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج + مر (لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج) =

پس - مر = لا + ما + مگ لا + ف + ما + ج

اس کسر میں شمار کنندہ نقطہ لا، ما سے دائرہ (ا) پر کھینچے ہوئے عماس کے مربع کے مساوی ہے اور نسب نما اسی نقطہ سے دائرہ (ب) پر کھینچے ہوئے عماس کے مربع کے مساوی ہے۔

نتیجہ یہی ہے کہ کسی ایسے نقطہ کا طریق جس سے دو دیے ہوئے دائروں پر کھینچے ہوئے خطوط عماس کے طولوں کی نسبت مستقل ہے، ایک ہم محور دائرہ ہے۔

(ف) اگر دو دو ایسے دائروں کے مرکز ہیں جن کے نصف قطر علی الترتیب ص، ص ہیں تو خط د و کو داخلا اور خارجا ص : ص کی نسبت میں تقسیم کرنے والے دو نقطے ان دو دائروں کی مشابہت کے ہمارکن کہلاتے ہیں۔

مشابہت کے مرکزوں کے خواص پر ہندسی طریقہ ہی سے اچھی طرح بحث ہو سکتی ہے۔ ان خواص میں سے سب سے زیادہ اہم حثیل ہیں : — (۱) دو دائروں کے مشترک عماسوں میں سے دو دو عماس ان دائروں کی مشابہت کے ایک مرکز میں سے جو کوئی خط ان دائروں کو قطع کرنا ہو اگر تاہم وہ ان سے متشابہا قطع ہوتا ہے۔

سوالات (۷)

(۱) اگر کسی دائرہ کے سرورں $\frac{1}{2}$ کے مجدد علی الترتیب $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ اور $\frac{1}{5}$ ہوں تو دائرہ کی مسادات

($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$) ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$) ($\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{3}$) ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$) ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$) ($\frac{1}{5}$ ، $\frac{1}{3}$) ہوگی۔
 [مثلاً] دائرہ پر کوئی ساقطہ $\frac{1}{3}$ ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$) کو $\frac{1}{3}$ سے ملانے والا خط عمود کا کے ساتھ زاویہ $\frac{1}{3}$ بناتا ہے۔ اسی طرح $\frac{1}{4}$ کو $\frac{1}{4}$ سے ملانے والا خط زاویہ $\frac{1}{4}$ بناتا ہے چونکہ یہ دونوں خط

باعدگیر علی القوائم ہیں لہذا $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ ۔

(۲) ثابت کرو کہ نقطوں ($\frac{1}{3}$)، ($\frac{1}{4}$) اور ($\frac{1}{5}$) میں سے گزرنے والے دائرہ کی مسادات $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ہوں گے۔

(۳) ایسے دائرہ کی مسادات دریافت کرو
 (۱) جو نقطوں ($\frac{1}{3}$) اور ($\frac{1}{4}$) میں سے گزرتا ہے اور مرکز مجموعہ پر رکھتا ہے۔

(ب) جس کا مرکز ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$) ہے اور جو محور کا پرچاس ہے۔
 (ج) جو خطوط مستقیم $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{6}$ سے بنے ہوئے مثلث کا حائط دائرہ ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ اگر صر کی قیمتیں $\frac{1}{3}$ سے بڑی اور $\frac{1}{4}$ سے چھوٹی ہوں تو مسادات $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{6}$ ایک طریق کو تعبیر کرتی ہیں۔

(۵) ثابت کرو کہ خط مستقیم $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{6}$ دائرہ $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ اور $\frac{1}{6}$ کو مس کرتا ہے، صر کی خواہ کچھ بھی قیمت ہو۔

(۶) نقطوں (۱،۰) اور (۰،۱) میں سے بالترتیب دو خط مستقیم ایک دوسرے کے ساتھ زاویہ طہ بناتے ہوئے کھینچے جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان تقاطع کا طریق لا + ما = ۱۔ $۱ \pm ۲ = ۱$ ما مم طہ دائرے ہیں۔

(۷) ایک دائرہ ایک دیے ہوئے خط مستقیم کو مس کرتا ہے اور ایک دوسرے خط سے جو سابق الذکر خط کے علی القوائم ہے ایک مستقل طول (۲) منقطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ اس کے مرکز کے طریق کی مساوات ما - لا = ۱ ہے۔

خط (۸) ایک خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ (۱،۰) اور (۰،۱) نقطوں سے اس تک کھینچے ہوئے عمودوں کے طولوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ بتاؤ کہ وہ خط ہمیشہ ایک دائرہ کو مس کرتا ہے۔

(۹) ایک مثلث کے ضلعوں کی مساواتیں لا = ۱، ما = ۵ اور لا - ما = ۵ ہیں۔ بتاؤ کہ اس مثلث کے اندرونی دائرہ کی مساوات (لا - ۲) + (ما - ۵) = ۱ ہے۔

(۱۰) دائرہ لا + ما = ۱ ص کے لسانہ سے نقطہ (لا، ما) کا قطبی ہے اگر وہ دائرہ (لا - ص) + ما = ۱ ص کو مس کرے تو ثابت کرو کہ (لا، ما) ایک ایسے منحنی پر واقع ہے جس کی مساوات ما + ۲ لا = ۱ ص ہے۔

(۱۱) بتاؤ کہ سمرجہ ذیل تین دائروں کا بنیادی مرکز (۲، -۱) ہے:-
لا + ما + ۲ لا + ۲ ما = ۰، لا + ما + ۵ لا + ۵ ما + ۴ = ۰ اور لا + ما = ۱۔

(۱۲) اگر نقطہ (ف، گ) سے دائرہ لا + ما = ۱ تک کھینچے ہوئے خط مماس کا طول اسی نقطہ سے دائرہ لا + ما + ۳ لا + ۳ ما = ۱ تک کھینچے ہوئے خط مماس کے طول کا دوخند ہو تو ف + گ + ۲ ف + ۲ گ = ۲۔

(۱۳) اس امر کے ذریعہ سے کہ کوئی سے تین دائروں کے بنیادی محور جو ان دائروں کے ایک ایک جفت کے لیے کھینچے گئے ہوں ایک نقطہ پر ملے ہیں، ثابت کرو کہ ایک دائرہ کھینچا جاسکتا ہے جو کوئی سے دوسرے تین دائروں کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

(۱۴) دائروں $LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$ اور $LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$ کے نصف قطروں کا درمیانی زاویہ دریافت کرو جو ایک نقطہ تقاطع تک پہنچنے لگے ہوں۔

(۱۵) ثابت کرو کہ ایک دائرہ کے محیط سے اس کے ایک قطر پر جو عمود ڈالا جاتا ہے وہ اس قطر کے قطعات کے ساتھ وسطی تناسب رکھتا ہے۔

(۱۶) ایک دائرہ $LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$ اور ایک خط $LA + MA + ج = ۰$ دیے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ مغنیوں کا نظام $LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$ ان تمام دائروں پر مشتمل ہے جن کے مرکز دیے ہوئے دائرہ کے مرکز میں سے دیے ہوئے خط پر علی القواکم گزرنے والے خط پر واقع ہیں۔

(۱۷) سوال (۱۶) میں موجود دیا گیا ہے اس کی ہندسی ترجمانی کرو۔

(۱۸) مندرجہ ذیل ہم محور دائروں کو مرسم کرو۔

$$(A) LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$$

$$(B) LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$$

$$(C) LA + MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$$

[سب سے پہلے $MA + ۲g + LA + ۲f + MA + ج = ۰$ مان کر ان دائروں کا بنیادی مرکز کھینچو اور پھر ہر کو دوسری مناسب مثبت منفی قیمتیں دیکر دائرے تیار کرو۔]

(۱۹) ایک نقطہ اسی طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے فاصلہ کا مربع ایک ثابت خط مستقیم سے اس کے عمودی فاصلہ کے لحاظ سے بدلتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ مستحکم نقطہ ایک دائرہ کو مرسم کرتا ہے۔

(۲۰) دو ثابت نقطے ہیں اور f ایک تسیمہ نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ $f = x \cdot f + y$ ۔ ثابت کرو کہ f کا طریق ایک دائرہ ہے نیز یہ بھی بتاؤ کہ n کی مختلف قیمتیں اگر لی جائیں تو ان تمام دائروں کا بنیادی محور ایک ہی ہے۔

(۲۱) ایک ثابت نقطہ O سے کوئی سا ایک خط مستقیم کھینچا جاتا ہے جو

ایک ثابت دائرہ سے نقطہ ف پر ملتا ہے اور اس خط پرق ایک ایسا نقطہ لیا جاتا ہے کہ سطح وق \times نصف مستقل۔ تباؤ کق کا طریق ایک دائرہ ہے۔

(۲۲) ثابت کر دو کہ دیے ہوئے دو دائروں کی مساوات ہمیشہ بشکل $لا + ما + لا + ب = ۰$ اور $لا + ما + لا + ب =$ کبھی جاسکتی ہے اور یہ کہ ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے اندر واقع ہو گا اگر $لا + ادب$ دونوں مثبت ہیں۔

(۲۳) اگر دو دیے ہوئے دائروں کی مشابہت کے مرکزوں کو ملانے والے خط کو بطور قطر مان کر دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کر دو کہ اس دائرہ پر کے کسی نقطہ سے بھی ان دیے ہوئے دو دائروں پر جو خطوط ماس کھینچے جاتے ہیں آپس میں متناظر نصف قطروں کی نسبت رکھتے ہیں۔

(۲۴) دائروں $لا + ما + ۲ = ۰$ اور $لا + ما - لا = ۰$ کے مشترک خطوط ماس ایک مساوی الاضلاع مثلث بناتے ہیں۔

(۲۵) (۱) (عہ) اور (ب) (بہ) کو ملانے والے خط کو قطر مان کر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے اس کی قطبی مساوات $س + جم (طہ - عہ) + ب جم (طہ - بہ) =$ اور $ب جم (عہ - بہ) = ۰$ ہے۔

(۲۶) دیے ہوئے تین دائروں کو ایک ہی زاویہ پر قطع کرنے والے دائرہ مرکز کا طریق ایک خط مستقیم ہے۔

(۲۷) ثابت کر دو کہ دو ثابت دائروں کو مس کرنے والے تمام دائرے دوسرے دو ثابت دائروں میں سے ایک دائرہ پر علی القواکم ہیں۔

(۲۸) اگر دو دائروں کی مساواتیں $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$ اور $لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج = ۰$ ہیں تو ثابت کر دو کہ مندرجہ ذیل مساوات کے دائرے

$$\frac{لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج}{لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج} = \frac{لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج}{لا + ما + ۲ گ + لا + ۲ ف + ما + ج}$$

بامدیگر علی القواکم متقاطع ہیں۔

(۲۹) ایک مثلث کے زاویہ نقطے بالترتیب (۰، ۰)، (۰، ۰)، (۰، ۰) اور

(۶۳۔) ہیں ثابت کرو کہ اس کے نو نقطہ دائرہ کی مساوات

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$
 ہے۔

آٹھواں باب

تعریفات — خطِ مکانی کی مساواتیں

۵۹ (۱) تراش مخروط — ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے اس کے ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ سے مستقل نسبت رکھتا ہے۔ اس ثابت نقطہ کو ماسکہ کہتے ہیں، اس ثابت خطِ مستقیم کو مرتب اور اس مستقل نسبت کو خروج المکرز۔

یہ نسبت جب مساوات کی لینے اکائی ہوتی ہے تو طریق خطِ مکانی کہلاتا ہے، جب ایک سے چھوٹی ہوتی ہے تو خط ناقص اور جب ایک سے بڑی ہوتی ہے تو خط زائد۔

پہلے ہم خطِ مکانی کی مساوات اور اس کے ذریعہ اس کے چند اہم خواص دریافت کریں گے۔

خطِ مکانی کی مساوات۔

فرض کرو شکل (۱۷۰) میں س ماسکہ ہے اور م ماسکہ مرتب۔ س و خط م ماسکہ پر عمود کھینچو اور فرض کرو $OS = 12$ ۔ خط و س کو لا کا محور مانو اور و ماسکہ کا محور۔

ف کوئی سا ایک نقطہ سمجھنی پر لو اور اس کے محدودوں کو لا و م

قرار دو۔

فن اور فم محوروں پر عمودیناؤ اور فن کو ملاؤ۔

خط مکانی کی تعریف کے لحاظ سے $S = F = F_m$

∴ فم = مس ف =

ف ن + م ن

معنی: $\bar{b} = \bar{a} + (a - b)$

$$(1) \dots (j-1) \text{ } j \text{ } r = \bar{r} \quad \underline{1}$$

یہی معنی کی مساوات ہے۔

منہجہ، مذکور بالا کے محرم کو

ایک نقطہ ۱ میں منقطع کرتا ہے

جہاں ما۔

اور مساوات کی رو

سے حب ماہ۔ تو لا = لغت

$\lambda = 10$

نقطہ اخط مکافہ کارا راس کہلاتا ہے۔

اگر محدودوں کا محور اُپر منتقل کیا جائے لیکن محوروں کی سمتوں میں کوئی

تغیر نہ مولے دیا جائے تو

مساوات (۱) $\lambda = \mu$ لا (۲) میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

اس کاٹا سے ماسکہ نقطہ (۱، ۲) ہوتا ہے۔ اور خط لا + ۱ =

معین اس ف = م ف = و ا + ا ن = ا + لا

جو نیکو یا ایک مثبت مقدار سے لایمیشہ مثبت ہوگا۔ اور اس لیے

مخبر الطبع محمد باکری، مشیت جانبہ و انعمہ و گاہ لاکر کسے، خاص قیمت کے

لے دیا۔ صبح ہر اکرا، دو تمشہ، پونہ نگر، حرمقندار، مرزا، سادہ گچھا، ساوکی، موٹنگا۔

یہ واضح ہے کہ مانی دویتیں ہوں جو مسخدا ریں با بد شیر سناوی ہوں۔

محکم دلائل سے مزین متنوع و منفرد موضوعات پر مشتمل مفت آن لائن مکتبہ

خور کے مٹی القوام ہو کے خور لا صلیف لریا۔
 این مینجی کہ منہ مصححہ کہ محو کر مشدہ جانہ می

منفی جانب کے حصوں کے ہر لحاظ سے مساوی ہونگے۔ جیسے جیسے لا بڑھیں گے
 مابھی بڑھیں گے نہ تو لا کے بڑھنے کی کوئی حد ہے اور نہ لا کے بڑھنے کی کوئی
 حد۔ پس لا کے محور کی مثبت جانب خط مکانی غیر محدود ہوتا ہے۔
 ماسک میں سے جو خط ٹرائیڈ کے علی القوائم گزرتا ہے خط مکانی کا محور
 کہلاتا ہے۔

ماسک میں سے خط مکانی کے محور کے علی القوائم جو خط مستقیم کھینچا جاتا ہے
 اس کا وتر خاص کہلاتا ہے۔

شکل (۱) میں $س ل = ک ل = و س = ۱۲$ پس وتر خاص کا پورا
 طول $۱۴ = ۱۲$

ہر ایسے نقطے کے لیے جو خط مکانی پر واقع ہے ہم نے دیکھا ہے کہ
 ما۔ $۱۴ = لا$ ۔ پس اس منحنی کے اندر سے جو کوئی نقطہ واقع ہو اس کے لیے
 ما۔ ۱۴ لا منحنی ہوگا۔ اسی طرح منحنی کے باہر جو نقطہ ہوگا اس کے لیے ما۔ ۱۴ لا
 مثبت ہوگا۔

خط مستقیم ما۔ $۱۴ = ج$ اور خط مکانی ما۔ ۱۴ کے مشترک نقطوں کے
 محدودان دونوں مساواتوں کی شرط کو پورا کرتے ہیں۔ پس ان نقطوں کے لیے
 (ما۔ $۱۴ = ج$) یعنی $لا + (۱۴ - ج) = لا + ج = ۱۴$ (۳)

چونکہ یہ دوسرے درجہ کی مساوات ہے اس لیے ہر ایک خط مستقیم
 خط مساوی سے دو نقطوں پر ملتا ہے جو حقیقی، منطقی یا خیالی ہوتے ہیں۔

اگر صر بہت چھوٹا ہے تو مساوات (۳) کی ایک اصل بہت بڑی ہوتی ہے۔
 جب صر = ۰۔ تو واضح ہے کہ ایک اصل نامتناہی بڑی ہو جاتی ہے۔ پس
 خط مکانی کے محور کے متوازی جو کوئی خط مستقیم کھینچا جاتا ہے منحنی سے ایک نقطہ
 پر محدود فاصلہ پر ملتا ہے اور دوسرے نقطہ پر اس سے نامتناہی بڑے فاصلہ
 پر ملتا ہے۔

(ب) خط مکانی ما۔ ۱۴ لا کو خط مستقیم ما۔ $۱۴ = ج$ کے

مس کرنے کی شرط۔

چونکہ خط مکانی اور خط مستقیم کے مشترک نقطوں کے مقطوعوں کی مساوات

$$\text{مڑ لا}^2 + (\text{مرج} - \text{م}^2) = (\text{لا} + \text{ج}^2) = ۰$$
 ہے
 اگر یہ خط مستقیم خط مماس ہو تو وہ مکانی سے دو منطبق نقطوں میں ملیگا۔
 ایسی صورت میں مساوات مندرجہ بالا کی اہلیں باہر بیکر مساوی ہونگی۔ جس کے
 لیے ضروری ہے کہ

$$\text{م}^2 \text{ مڑ ج}^2 = (\text{مرج} - \text{م}^2)$$

پس $\text{مرج} = \text{لا} + \text{ج}^2$ کی
 صر کی قیمت کچھ ہی ہو خط مستقیم $\text{م} = \text{مر لا} + \frac{1}{\text{مر}} \text{خط مکانی م}^2 = \text{م}^2 \text{ لا کو}$
 مس کرے گا۔

(ج) مکانی کے دیے ہوئے دو نقطوں میں سے گزرنے والے
 خط مستقیم کی مساوات اور اس کے ذریعہ مکانی کے کسی نقطہ پر کے
 خط مماس کی مساوات کی تعیین۔

مکانی کی مساوات $\text{م}^2 = \text{م}^2 \text{ لا ماز اور اس پر لا، م اور لا م، م کوئی سے}$
 دو نقطے کو۔

ان نقطوں کو ملانے والے خط کی مساوات $\frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{م} - \text{م}}{\text{م} - \text{م}}$ ہے
 جو پھیلائے سے $\text{لا} = (\text{م} - \text{م}) = \text{لا} (\text{م} - \text{م}) - \text{لا م} (\text{م} - \text{م})$ بن جاتی ہے چونکہ
 لا، م اور لا، م نقطے مکانی پر واقع ہیں اس لیے $\text{لا} (\text{م} - \text{م}) = \text{لا م} (\text{م} - \text{م})$
 $-\frac{\text{لا م}}{\text{م} - \text{م}} (\text{م} - \text{م})$ یعنی $\text{م}^2 \text{ لا لا م} = (\text{م} - \text{م}) (\text{لا م} - \text{لا م}) - \text{لا م} (\text{م} - \text{م})$
 پس $\text{م}^2 \text{ لا} = (\text{لا م} + \text{لا م}) - \text{لا م} \text{ یا } (\text{لا م} + \text{لا م}) - \text{م}^2 \text{ لا} - \text{لا م} = ۰$
 اس مساوات میں $\text{لا م} = \text{لا م}$ لکھنے سے نقطہ (لا م، م) پر کے خط مماس کی
 مساوات یعنی $\text{م}^2 \text{ لا م} - \text{م}^2 \text{ لا} = ۰$ حاصل ہوتی ہے اور چونکہ $\text{لا م}^2 = \text{م}^2 \text{ لا م}$

لہذا $\frac{۱}{۲} \text{ مام} = \frac{۱}{۲} (\text{لا} + \text{لام})$ (۲)
 واضح ہے کہ مکافی کے اس $\frac{۱}{۲}$ یعنی نقطہ (۰.۵) کے خط ماس کی مساوات
 $\text{لا} =$ ہے پس یہ خط ماس مکافی کے محور پر علی القوائم ہے۔
 مکافی کے ماس کی یہ مساوات $\text{ما} = \text{مر} + \frac{۱}{۲} \text{ ج}$ کی شکل میں لکھی جاتی ہے تو

$$\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{ لا} + \frac{۱}{۲} \text{ لام} \quad \text{جس میں مر} = \frac{۱}{۲} \text{ ج} \quad \text{اور ج} = \frac{۱}{۲} \text{ لا}$$

پس $\text{ج} = \frac{۱}{۲}$ جیسا کہ ذیلی فصل (ب) میں اور طریقہ سے بتایا گیا ہے۔

مثال (۱)۔ مکافی کے دو خطوط ماس کے نقطہ تقاطع کا معین، ۲۸

خطوط ماس کے نقاط تماس کے معینوں کا حسابی اوسط ہے۔

(لا، م) اور (لام، مام) نقطوں پر کے خطوط ماس کی مساواتیں بالترتیب

$$\text{مام} = \frac{۱}{۲} (\text{لا} + \text{لام}) \quad \text{اور مام} = \frac{۱}{۲} (\text{لا} + \text{لام}) \quad \text{ہیں۔}$$

ایک کو دوسری میں سے تفریق کرنے سے ان ماسوں کے مشترک نقطہ

$$\text{کے لیے} \quad \text{ما} (\text{م} - \text{لام}) = \frac{۱}{۲} (\text{لا} - \text{لام}) = \frac{۱}{۲} (\text{م} - \text{لام}) \quad \therefore \text{ما} = \frac{۱}{۲} (\text{م} + \text{لام}) \quad \dots (۱)$$

واضح ہو کہ خطوط ماس کی مساواتوں کو جمع کرنے سے $\text{ما} (\text{م} + \text{لام}) = \frac{۱}{۲} (\text{م} + \text{لام})$

$$\frac{۱}{۲} (\text{لا} + \text{لام}) \quad \text{پس} \quad \text{ما} = \frac{۱}{۲} (\text{لا} + \text{لام}) - \frac{۱}{۲} (\text{م} + \text{لام}) = \frac{۱}{۲} \text{ لا} \quad \dots (۲)$$

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے خطوط ماس کے تقاطع کا طریق جو

باہم دیگر علی القوائم ہوں مکافی کا ثابت ہے۔

فرض کرو کہ ان خطوط ماس کی مساواتیں $\text{ما} = \text{مر} + \frac{۱}{۲} \text{ ج}$ اور

$$\text{ما} = \text{مر} + \frac{۱}{۲} \text{ ج} \quad \text{ہیں۔}$$

چونکہ یہ باہم دیگر علی القوائم ہیں اس لیے $\text{مر} =$ ۔ پس مساوات دوم
 مر کی رقموں میں

$\text{ما} = \frac{۱}{۲} \text{ لا}$ ۔ اور لکھی جاسکتی ہے۔
 اس مساوات کو پہلی مساوات میں سے تفریق کرنے سے مشترک نقطہ کے

مقطوعہ کی مساوات = لا (م + $\frac{۱}{۲}$) + ا (م + $\frac{۱}{۲}$) یعنی لا + ا = ۰۔ حاصل ہوتی ہے جو مرتب کی مساوات ہے۔

(د) مکانی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات۔

مکانی کے نقطہ (لا، با) پر کے عماد کی مساوات

ما با = ۲ (لا + لا) ہے یعنی ما با = ۲ (لا + لا) = ۰ ہے۔

اس خط کے علی القواکم خط کی مساوات ۲ (لا + لا) + ج = ۰ ہے جس میں ج کوئی مستقل ہے چونکہ یہاں لا، با پر کا عماد مقصود ہے اس لیے آخر الذکر مساوات میں بجائے لا اور ما کے لا اور با لکھنے سے ۲ (لا + لا) + ج = ۰ جس سے ج کی قیمت = ۲ (لا - با) - با لا برآمد ہوتی ہے۔

پس ۲ (لا + لا) - با لا - با = ۰ یعنی مکانی کے نقطہ لا، با پر کے عماد کی مساوات ۲ (لا - با) + (لا - لا) = ۰ (۱)۔

چونکہ ۳ لا = با لہذا ۸ (لا - با) + (لا - لا) = ۰ (۲)۔

جو بشکل ما = - $\frac{با}{۲}$ + لا + $\frac{با}{۸}$ (۳) لکھی جاسکتی ہے۔

- $\frac{با}{۲}$ کے عوض م لکھنے سے ما = - $\frac{با}{۲}$ اور $\frac{با}{۸}$ = - $\frac{با}{۸}$ ۔

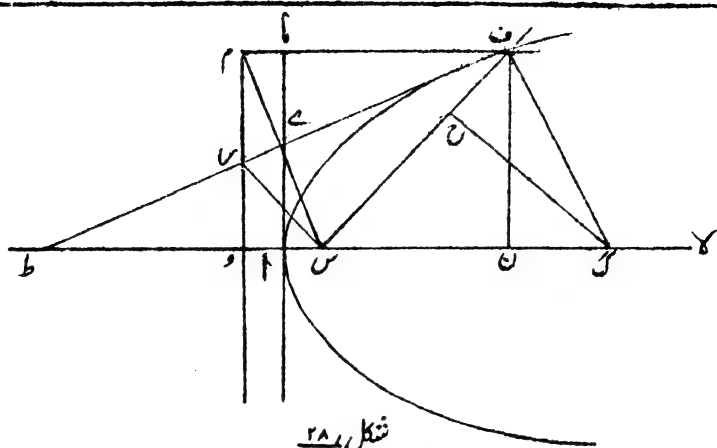
پس مساوات (۳) بشکل ما = م لا - ۲ م - $\frac{با}{۸}$ (۴) تبدیل

ہو جاتی ہے جو بعض صورتوں میں زیادہ مفید پائی جاتی ہے۔

(۵) اب ہم مکانی کی مساوات کے ذریعہ اس مسخنی کے بعض اہم مہندسی خاص کو ثابت کرینگے۔

شکل ۲۸ میں مکانی ف ا کھینچا گیا ہے جس کا مرتب و م ہے۔

ف پر کا خط عماد ف ط مرتب سے نقطہ س پر ملتا ہے اور محور سے نقطہ ط پر۔ ف سے ف م، ف ن مرتب اور محور پر عمود کھینچے گئے ہیں ف کے محدود لا، م فرض کرو اس پر کے عماد کی مساوات ما م = ۲ (لا + لا) (۱)۔



جہاں یہ خط محور مکافنی یعنی محور ولا سے ملتا ہے وہاں ما = . پس اس نقطہ پر لا + لا = . یعنی ط = ان (عہ)

∴ طس = لس + ان = سف (بہ)

اور چونکہ طس = س ف زاویہ س ط ف = زاویہ س ف ط۔ پس

خطِ ماسرف طرزِ اویس فم کی تنصیف کہتا ہے۔ (جہ)

یہ بھی ظاہر ہے کہ مثلث سراسر ف اور سراسر م ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

لہذا اسراس ف = سراس ف = ایک تراویہ قائمہ (ضہ)
چونکہ م نقطہ (-، ۱) ہے اور نقطہ (۰، ۱) خط اس م کی مساوات

چونکہ م نقطہ (-۱، ۱) ہے اور س نقطہ (۱، ۰) خط س م کی مساوات

$$\epsilon(r) \dots \dots \frac{1+v}{12} = \frac{1.6-1}{1.6-}$$

واضح ہے کہ یہ خطاف پر کے خطِ تماس کے علی القوائم ہے جس کی مساوات (۱) ہے

∴ میں خطِ ماس فاطمہ کے علی القوائم ہے۔ (صہ)

چونکہ فطریات میں مکی القوائیم اور زاویہ س ف م کی تنصیف

کرتا ہے اس لیے وہ س م کی بھی تنصیف کرے گا۔ اگر س م اور ف ط کے تقاطع کا

نقطہ سے قرار دیا جائے $س = م$ لیکن $س = ا$ اور $اس$ لیے $ا$ سے خط و م کے متوازی ہے۔ اور اس لیے مکافی کے $اس$ پر کا خط $ماس$ ہے۔ پس مکافی کے ماسکد میں سے جو خط $اس$ کے کسی خط $ماس$ $ف$ پر علی القوا $ا$ عم کھینچا جاتا ہے $ف$ سے

مکافی کے نقطہ $س$ پر $اس$ پر کے خط $ماس$ سے ملتا ہے۔ (ث)

اس مسئلہ کو ہم ہندسہ تحلیلی سے بھی اس طرح ثابت کر سکتے ہیں :-
مکافی کے کسی خط $ماس$ کی مساوات $ما = مر + لا$ (س فرض کرو
اس خط پر ماسکد (۱، ۰) سے گرائے ہوئے عمود کی مساوات

$$1 = \frac{1}{م} - \frac{1}{(لا - 1)} \text{ ہو۔}$$

$$\text{یعنی } ما = \frac{لا}{م} + \frac{1}{م} \text{ (م) ہوگی۔}$$

ظاہر ہے کہ خط $ط$ (۳) اور (۴) اس نقطہ پر ملتے ہیں جہاں $لا = ۰$ ۔
مکافی کے نقطہ $ف$ یعنی (لا، ۱) پر کے عمود کی مساوات

$$۲ = (ما - ۱) + (لا - لا) = ۰ \text{ ہے (ذیلی فصل د)}$$

$$\text{نقطہ گ پر } ما = ۰ \text{ اور اس لیے } ۲ = ۱ + ما + (لا - لا) = ۰$$

$$\text{یعنی } ۱۲ = لا - لا = آگ - ان = ن گ$$

$$\therefore ن گ = ۱۲ \text{ (یعنی مستقل) (یہ)}$$

سوالات ۸ (۱)

(۱) ثابت کرو کہ مکافی $ما = ۱$ کے وتر خاص کے سروں پر کے
خط $ط$ $ماس$ اور ان کے عمودوں کی مساواتیں بالترتیب $لا + ما = ۱$ اور $ما \pm لا = ۳$ = ۰
ہیں۔

(۲) بتاؤ کہ مساوات $لا + ۱۲ + لا + ما = ۰$ ایک ایسے مکافی کو تعبیر کرتی ہے
جس کا $اس$ نقطہ $(-۱۲، ۱۲)$ پر ہے جس کا وتر خاص ۱۲ ہے اور جس کا محور
ما کے محور کے متوازی ہے۔

(۳) اگر مکانی کے محور کے کسی ثابت نقطہ میں سے کوئی ساد ترف و ت کھینچا جائے تو بتاؤ کہ ف اور ت کے معینوں کا حاصل ضرب مستقل ہے اور اسی طرح ان کے مقطوعوں یا فصولوں کا حاصل ضرب بھی مستقل ہے۔
 (۴) مکانی کے خطوط مماس = م لا + م لا اور م لا = م لا + م لا کے نقطہ تقاطع کے محدود دریافت کرو۔ ثابت کر دو کہ ان کے تقاطع کا طریق ایک خط مستقیم ہے جبکہ م م مستقل ہے اور جب م م = ۱ تو یہ خط مستقیم مکانی کا مرتب ہے۔

(۵) ثابت کر دو کہ مکانی م لا کے اندر فی مثلث کا رقبہ
 $\frac{1}{2} (م لا - م لا) (م لا - م لا) = \frac{1}{2} (م لا - م لا) (م لا - م لا)$ ہے جس میں م لا، م لا، م لا مثلث کے زاویہ
 نقطوں کے معین ہیں۔

دو کسی نقطہ سے مکانی کے دو خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں جو حقیقی، منطبق یا خیالی ہونگے یہ لحاظ اس کے کہ نقطہ مکانی کے باہر، اس پر یا اس کے اندر واقع ہے۔

مرکی خواہ کچھ ہی نیت ہو خط م لا = م لا + م لا (۱) مکانی
 م لا = م لا کو مس کرتا ہے۔

یہ خط ایک مخصوص نقطہ لا، م میں سے گزرتا ہے اگر م لا = م لا + م لا یعنی
 اگر م لا = م لا + م لا = ۱ (۲)

مصادیق (۲) یہ لحاظ کر ایک دو درجی مصادیق ہے۔ اس سے مکانی کے ان خطوط مماس کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو نقطہ لا، م میں سے گزرتے ہیں۔ چونکہ دو درجی مصادیق کی دو سمتیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ لا، م میں سے مکانی پر عموماً دو خطوط مماس کھینچے جاسکتے ہیں۔ اگر م لا = م لا + م لا مثبت ہے تو یہ سمتیں حقیقی ہیں اگر صفر ہے تو منطبق اور اگر منفی ہے تو خیالی۔ یعنی نقطہ لا، م اگر مکانی کے باہر ہے تو خطوط مماس حقیقی ہونگے، اگر نقطہ مکانی پر

ہوگا تو خطوطِ تماس منطبق ہونگے اور اگر اندر ہوگا تو خیالی۔
 (۱) کسی نقطہ سے مکافی پر دو خطوطِ تماس جو کھینچے جاسکتے
 ہیں ان کے نقاطِ تماس میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کی
 مساوات۔

فرض کرو نقطہ لا، ما سے خطوطِ تماس کھینچے گئے ہیں اور خطِ مکافی
 کے ساتھ ان کے نقاطِ تماس بالترتیب عم، ایم، اور عم، ایم ہیں۔
 (عم، ایم) اور (عم، ایم) پر کے خطوطِ تماس کی مساواتیں
 ایم = ۱۲ (لا + عم) اور ایم = ۱۲ (لا + عم) ہیں۔
 چونکہ نقطہ لا، ما ان دونوں خطوطِ مستقیم پر واقع ہے۔ لہذا
 ایم = ۱۲ (لا + عم) (۱) اور ایم = ۱۲ (لا + عم) (۲).....
 لیکن مساواتیں (۱) اور (۲) اس شرط کو ظاہر کرتی ہیں کہ (عم، ایم) اور
 (عم، ایم) نقطے خطِ مستقیم ما، ما = ۱۲ (لا + عم) پر واقع ہوں۔
 پس مساوات (۳) نقطہ لا، ما سے کھینچے ہوئے خطوطِ تماس کے نقاطِ تماس میں
 گزرنے والے خطِ مستقیم کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ ف سے مکافی پر کھینچے ہوئے دو خطوطِ تماس کے نقاطِ تماس
 کو ملانے والے خطِ مستقیم کو ف کا قطبی بہ لحاظ مکافی کہتے ہیں۔

(ب) اگر مکافی کے لحاظ سے کسی نقطہ ف کا قطبی نقطہ

ق میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرے گا۔

ف کے محدودوں کو لا، ایم اور ق کے محدودوں کو لا، ایم فرض کرو۔

نقطہ ف کے قطبی بہ لحاظ مکافی ما = ۱۲ لا کی مساوات

ما = ۱۲ (لا + لا) ہے

اگر یہ خط نقطہ ق (یعنی لا، ایم) میں سے گزرتا ہے تو ما = ۱۲ (لا + لا)

اس مساوات کے تشاکل سے واضح ہے کہ وہ اس شرط کو بھی ظاہر کرتی ہے کہ ق کا قطبی ف میں سے گزرنا چاہیے۔

اس نتیجے سے مشتق ہوتا ہے (جیسا کہ دائرہ کی صورت میں بتایا گیا تھا) کہ اگر دو نقطوں ف، ق کے قطبی نقطہ میں پر ملتے ہیں تو مس خطِ مستقیم ف، ق کا قطب ہے۔ چونکہ ماسکہ (۱، ۰) کے قطبی کی مساوات $۱ + ۰ = ۰$ ہے لہذا ماسکہ کا قطبی مکانی کا مرتب ہے۔

اگر ق کسی نقطہ مرتب پر واقع ہے تو ق ماسکہ س کے قطبی پر ہے۔ پس ق کا قطبی ماسکہ س میں سے گزرے گا۔ پس اگر مرتب کے کسی نقطہ سے مکانی پر خطِ تماس کھینچے جائیں تو ان کے نقاطِ تماس کو ملانے والا خط ماسکہ میں سے گزرے گا۔

(ج) مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہے۔

مکانی $۱ + ۲ = ۰$ پر کے دو نقطوں (۱، ۱) اور (۱، ۲) کو ملانے والے خطِ مستقیم کی مساوات جیسا کہ ۵۹ (ج) میں بتایا گیا ہے۔

(۱، ۱) + (۱، ۲) = ۲ (۱، ۱.۵) = ۰
اگر یہ خطِ مستقیم مکانی کے محور کے ساتھ زاویہ طہ بنائے تو

$$\text{مس طہ} = \frac{۱ + ۲}{۱ + ۱} = ۱.۵ \quad (۲)$$

لیکن اگر وتر کے وسطی نقطہ کے محدود (۱، ۱) ہوں تو

$$۱ + ۱ = ۲ \text{ اور } ۱ + ۱ = ۲$$

پس مساوات (۲) کی جگہ سے مس طہ = $\frac{۱ + ۲}{۱ + ۱}$ یعنی $۱.۵ = ۲$ (مس طہ... ۱۳)

جس سے ظاہر ہے کہ جب تک خط مستقل ہے مابھی مستقل ہے۔
 :: مکانی کے متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطوں کا
 طریق ایک خطِ مستقیم ہے جو مکانی کے محور کے متوازی ہے۔

[طرہیتِ دیگر :- خطِ مستقیم $ما = مد + ج$ مکانی $ما = ۴ + لا =$ کو جس مقام پر
 قطع کرتا ہے وہاں $۴ = ما + ۱ ج$ پس مکی اسیں اگر $ما = ۱$ قرار دی
 جائیں تو $ما + ۱ = ۴$ اس لیے اگر وتر کے وسطی نقطہ کا معین $ما$ ہے تو $ج$ کی
 جملہ قیمتوں کے لیے $ما = ۲$]

معمولہ - کسی مخروطی کے متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقطوں
 کا طریق قطر کہلاتا ہے۔ جن وتروں کی قطر نصف کرتا ہے اس کے معین
 کہلاتے ہیں۔

فصل ۵۹ (۱) میں ہم نے دیکھا ہے کہ مکانی کا قطر مکانی سے اس کے
 اس سے محدود فاصلہ پر صرف ایک ہی نقطہ پر ملتا ہے۔ وہ نقطہ جہاں قطر
 مکانی کو قطع کرتا ہے اس قطر کا سرا کہلاتا ہے۔

چونکہ قطر کے سرے پر کا ماس قطر کا وہ معین ہے جو مکانی سے دو منطبق
 نقطوں میں ملتا ہے اس لیے مکانی کے قطر کے سرے پر کا
 خط ماس ان وتروں کے متوازی ہے جن کی وہ قطر نصف کرتا ہے۔

(د) مکانی کی مساوات جبکہ اس کا کوئی قطر اور اس کے
 سرے پر کا خط ماس محدود مانے جائیں۔

فرض کرو شکل (۲۹) میں ف مکانی کے قطر کا سرا ہے اور ف پر کا خط ماس
 محور کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے۔ تب $ن ف = ۲$ مم طہ [نصل ۶۰ (ج)]

ان حاسوں کی سمتیں دریافت ہوتی ہیں جو اس نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
اگر اس دو درجہ مساوات کی اصلیں m ، m ہوں تو

$$\frac{1}{a} = m + m \quad \text{اور} \quad \frac{1}{a} = m - m$$

$$\therefore (m - m) = \frac{2}{a - a}$$

لیکن اگر یہ دو خطوط m اس باہر گزرنا دیتے ہیں تو

$$\frac{m - m}{m + m} = m$$

$$\therefore m = \frac{2}{2(a + a)}$$

پس مطلوبہ طریق کی مساوات $m - m - (a + a) = m$ ہے۔

مثال (۲)۔ مکافی کے دو ایسے عمادوں کے نقطہ تقاطع کی مساوات

جو باہر گزرنا دیتے ہیں۔

m کی خواہ کچھ ہی نسبت ہو خط $m = m - m - (a + a)$ (۱)
مکافی $m = m$ کا ایک عماد ہے۔ اگر نقطہ (۱) معلوم مانا جائے مساوات
(۱) اس نقطہ میں سے گزرنے والے عمادوں کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے۔
اگر اس مساوات کی اصلیں m ، m ہوں تو

$$\frac{1}{a} = m - m \quad \text{..... (۲)}$$

لیکن اگر ان میں سے دو عماد با فرض m ، m علی القوائم ہیں تو

$$\frac{1}{a} = m - m$$

پس مساوات (۲) کی زد سے $m = m$
لیکن m مساوات (۱) کی ایک اصل ہے۔ لہذا $m = m - m - (a + a)$

$$\therefore m = (a - a)$$

سوالات ۸ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ مکانی $MA = LA$ اور مکانی $LA = MB$ مابا ہمدیگر زاویہ

مس $\frac{MA}{MB} = \frac{LA}{LB}$ پر متقاطع ہیں۔

(۲) اگر قس ق ایک مکانی کا ماسکی وتر ہو اور ف ۲ مرتب سے نقطہ م پر ملے تو بتاؤ کہ م ق مکانی کے محور کے متوازی ہو گا۔

(۳) ثابت کرو کہ مکانی کے دو ایسے نقطوں پر کے خطوط حماس کے نقطہ تقاطع کا طریق جن کے سین با ہمدیگر مستقل نسبت رکھتے ہیں ایک مکانی ہے۔

(۴) ایک مکانی کے وتر خاص کے کسی نقطہ سے اس کے (یعنی وتر خاص کے) سروں پر کے خطوط حماس پر عمود ڈالے جاتے ہیں۔ بتاؤ کہ ان عمودوں کے پیروں کو ملانے والا خط مکانی کو مس کرتا ہے۔

(۵) کسی نقطہ ط سے بہ لحاظ مکانی اس کے قطبی پر جو عمود ط ن کھینچا جاتا ہے محور سے نقطہ م پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر ط ن x ط م مستقل ہے تو ط کا طریق ایک مکانی ہے۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ اگر ط ن : ط م کی نسبت مستقل ہے تو اس صورت میں بھی طریق ایک مکانی ہے۔

(۶) بتاؤ کہ مکانی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق جو ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے ایک مکانی ہے۔

(۷) مکانی کے کسی نقطہ و میں سے کھینچا ہوا قطر اگر کسی وتر سے ف پر ملے اور اس وتر کے سروں پر کے خطوط حماس قطر سے ق ق پر ملیں تو بتاؤ کہ وف = وق x وق

(۸) ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما - لا - لا = کے کسی نقطہ کا قطبی بہ لحاظ دائرہ لا + ما + لا - لا - لا = مکانی ما + لا - لا = کو مس کرے گا۔

(۹) اگر ایک ذو اربعۃ الاصلاخ کسی مکافی کا حائل ہو تو اس ذو اربعۃ الاصلاخ کے وتروں کے وسطی نقطوں میں سے گزرنے والا خط مکافی کے محور کے متوازی ہوگا۔

(۱۰) اگر مکافی کے ماسکی وتر کے کسی نقطہ سے دو خطوط حماس کھینچ جائیں تو یہ خطوط حماس اس ماسکی وتر کے سروں پر کے خطوط حماس کے ساتھ مساوی مائل ہونگے۔

(۱۱) مکافی کے ایک ایسے وتر کے وسطی نقطہ کا طریق دریافت کرو جو مکافی کے اس کے مقابل ایک زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

(۱۲) مکافی کے تین نقطوں ف، ق، س پر کے عماد ایک نقطہ و میں باہر دیکر ملتے ہیں ثابث کرو کہ س ف + س ق + س س = ۲ = ۲ دم جس میں س مکافی کا ماسک ہے، اس کا اس ہے۔ اور دم نقطہ و سے اس پر کے خط حماس پر ڈالا ہوا عمود ہے۔

(۱۳) ثابث کرو کہ مکافی کے تین عمادوں سے بنے ہوئے مثلث کا

رقبہ $\frac{1}{2}(م + م + م)(م - م - م)$ (م + م + م) (م - م - م)

(۱۴) مکافی کے کسی دو ماسکی وتروں کو قطر مان کر ان پر دائرے کھینچ جاتے ہیں۔ ثابث کرو کہ ان کا مشترک وتر مکافی کے اس میں سے گزرتا ہے۔

(۱۵) اگر ا ب ج ایک مکافی کا اندرونی مثلث ہے اور ا ب ج

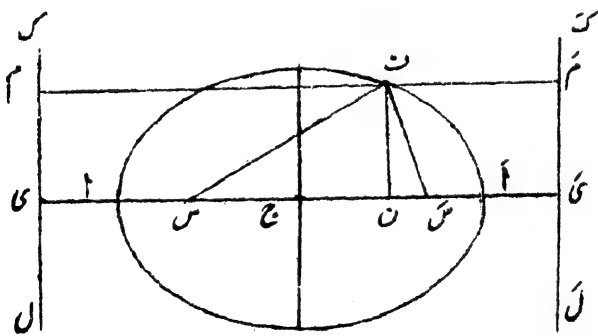
ایک ایسا مثلث ہے جو مثلث ا ب ج کے ضلعوں کے متوازی کھینچے ہوئے تین خطوط حماس سے بنا ہے۔ ثابث کرو کہ ا ب ج کے ضلع ا ب ج کے متناظر ضلعوں کے چہار چند ہونگے۔

(۱۶) ف گ مکافی ما - م / لا = کے نقطہ ف پر کا عماد ہے۔ گ

محہ پر واقع ہے اور گ ف باہر کی طرف آگے کو تک بڑھایا گیا ہے اس طرح کہ ف ق = گ ف ثابث کرو کہ ق کا طریق ایک مکافی ہے۔ اور ف اور ق جن مرکافیوں پر واقع ہیں ان کے ان نقطوں پر کے خطوط حماس کے تقاطع کا طریق ما (لا + م / لا) + م / لا = ۰ ہے۔

نوال باب
خط ناقص کی مساویں

۶۱۔ تعریف۔ جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے جو ماسکہ کہلاتا ہے ایک ثابت خط مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتب کہلاتا ہے) اکائی سے کمتر مستقل نسبت رکھتا ہے تو اس نقطہ کا طریق خط ناقص ہے۔
(۱) خط ناقص کی مساوات۔
فرض کرو S ماسکہ اور K مرتب ہے (شکل نمبر ۱)۔ S سے Y مرتب



شکل ۳۰

پرموڈالو۔ یس کو ۱ پر اس طرح تقسیم کرو کہ $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ جس میں

ز ایک سے کم ہے۔

ی س کو آگے بڑھانے پر ایک نقطہ α ایسا ملتا ہے کہ جس کے لیے

$$\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ ج کو } \alpha \text{ کا وسطی نقطہ مانو اور } \alpha = 2 \text{ (۱)}$$

$$\text{تب } \alpha = 1 \text{ اور } 1 = 2 \text{ اور } 1 = 2 \text{ (۱)}$$

$$\therefore \alpha = 1 + 1 = 2 \text{ (۱)}$$

$$\text{پس } 2 = 1 + 1 = 2 \text{ (۱)}$$

$$\text{نیز } 1 - \alpha = 1 - 2 = -1 \text{ (۱)}$$

$$\text{یعنی } 1 - 2 = -1 \text{ (۱)}$$

$$\therefore 1 = 2 - 1 = 1 \text{ (۱)}$$

اب نقطہ ج کو مبداء ج α کو لا کا محور اور ج میں سے ایک خط α کا علی القوائم ما کا محور مانو۔

فرض کرو ف منحنی پر کوئی سا ایک نقطہ ہے اور اس کے محدود لا، ما ہیں

$$\text{تب } 1 = 2 = 1 + 1 = 2 \text{ (۱)}$$

$$\text{لیکن } 1 = 2 = 1 + 1 = 2 \text{ (۱)}$$

$$\text{پس } (1 + 1) = 2 = 1 + 1 = 2 \text{ (۱)}$$

$$\therefore 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \text{ (۱)}$$

لا = لکھنے سے ما = ± 1 اور $\sqrt{(1 - 1)}$ منحنی کے محور ما پر کے مقطوعات ہیں۔

$$\text{اگر ان طولوں کو } \pm 1 \text{ کہیں تو } 1 = 1 \text{ (۱)}$$

$$\text{اور منحنی کی مساوات (۳) صورت } 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \text{ (۱)}$$

انتخاب کر لیتی ہے۔

وتر خاص وہ وتر ہے جو محور میں سے مرتب کے متوازی کھینچا جاتا

ہے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۵) میں لا = - اور لکھا جائے

$$\text{تب } 1 = 1 = 1 \text{ (۱)}$$

$$\text{پس نیم وتر خاص کا طول } = \frac{1}{1}$$

مساوات (۵) میں ماکہ قیمت ب سے بڑھ نہیں سکتی ورنہ لا منفی مقدار ہو جائیگی۔ اسی طرح لا کی قیمت ا سے بڑھ نہیں سکتی۔ پس خط ناقص ایک ایسا منحنی ہے جو تمام سمتوں میں محدود ہے۔

اگر لا عدداً ا سے کم ہو تو لا مثبت مقدار ہوگی اور لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے ماکہ دو مساوی اور بنجائے علامت مختلف قیمتیں ہوگی۔ پس لا کا محور اس منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

اسی طرح اگر ما عدداً ب سے کم ہو تو لا مثبت مقدار ہوگی اور ماکہ کی کسی مخصوص قیمت کے لیے لا کی دو مساوی اور باہمیہ مخالف قیمتیں ہوگی۔ پس ماکہ کا محور خط ناقص کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر لا کے محور پر س اور ی دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ ج س = س ج اور ج ی = ی ج تو نقطہ س بھی منحنی کا ایک ماسکہ ہوگا اور ی میں سے ج ی پر علی القوائم کھینچا ہوا خط اس کا متناظر مرتب ہوگا۔

اگر (لا، ما) منحنی پر کا کوئی نقطہ ہو تو لا مساوات $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$ کی شرط کو پورا کرے گا۔ اور ایسی صورت میں محدود۔ لا اور۔ ما کے لیے بھی یہ مساوات صادق آئیگی۔ لہذا نقطہ (لا، ما) بھی اس منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن (لا، ما) اور (لا، ما) نقطے مبداء میں سے گزرنے والے خط مستقیم پر ہیں اور مبداء سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ پس مبداء اس میں سے گزرنے والے ہر وتر کی تئصیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز ہے۔

ماسکوں میں سے گزرنے والا وتر محوہ اعظم کہلاتا ہے اور مرکز میں سے اس پر علی القوائم گزرنے والا وتر محوہ اقل کہلاتا ہے۔

(ب) ناقص پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی

تعیین —

شکل بالا میں چونکہ س ف = ز × ف م لہذا س ف = ز × ی ن

$$= (ز ی ج + ج ن) = ز (ا + \frac{ا}{ب}) = ا + ز لا$$

اور سن ف = ز × ن ی = ز (ج ی - ج ن) = ۱ - ز لا

پس سن ف + سن ف = ۲

اس خواص کے مد نظر ناقص کی بعض اوقات یوں تعریف کی جاتی ہے کہ وہ ایک ایسے نقطہ کا طریق ہے جس کے فاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے۔

اس تعریف سے آغاز کر کے ناقص کی مساوات حاصل کرنے کے لیے فرض کرو کہ یہ مستقل حاصل جمع ۲ ہے اور ان دو ثابت نقطوں کا درمیانی فاصلہ ۲ و ز ہے۔ ان ثابت نقطوں کو لانے والے خط کے وسطی نقطہ کو مبداء مانو اور اس خط کو اور اس کے علی القوائم خط کو متحد قرار دو۔ تب منحنی کی سمت شرط کے بموجب

$$۲ = \sqrt{(۱ - ز)^2 + ۲} + \sqrt{(۱ + ز)^2 + ۲}$$

اس کو منطبق بنانے پر $۲ = (۱ - ز)^2 + ۲ + (۱ + ز)^2 + ۲$ اور یہ ناقص کی وہی مساوات ہے جو قبل ازیں دوسری تعریف کے ذریعہ سے حاصل کی گئی ہے۔

۵ (ج) خط ناقص کی قطبی مساوات۔

اگر مرکز کو قطب مانا جائے تو مساوات $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b}$ میں لا کے عوض سرجم طہ اور ما کے عوض سرجاب طہ لکھنے سے قطبی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ چنانچہ یہ مساوات

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \quad \text{یعنی} \quad \frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \quad (۱)$$

مساوات (۱) صورت $\frac{۱}{r} = \frac{۱}{a} + \left(\frac{۱}{b} - \frac{۱}{a}\right)$ جب طہ صورت (۲) میں لکھی جاسکتی ہے۔

چونکہ $\frac{۱}{a} - \frac{۱}{b}$ مثبت ہے اس لیے مساوات (۲) سے ظاہر ہے کہ $\frac{۱}{r}$ کی اقل قیمت $\frac{۱}{a}$ ہے۔ اور جیسے جیسے طہ صفر سے بڑھ کر $\frac{۱}{b}$ ہوتا ہے ویسے ہی $\frac{۱}{r}$ کی قیمت بڑھتی جاتی ہے۔ اس کی اعظم قیمت $\frac{۱}{b}$ ہوتی ہے۔ پس نیم قطر

سمتی ل سے گھٹ کر ب ہوتا جیسے طہ صفر سے بڑھ کر $\frac{\pi}{4}$ ہوتا ہے۔

[نوٹ - ہم نے دیکھا ہے کہ مرکز کو مبدأ ماننے سے اُن تمام نقطوں کے لیے جو ناقص پر واقع ہیں $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$ خط مکافی کی صورت میں جیسا کہ بتایا گیا تھا اسی طرح ناقص کے لیے بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ اگر لا، مانحنی کے اندر کے کسی نقطہ کے محدود ہوں تو جملہ $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$ منفی ہوگا اور اگر وہ منحنی کے باہر کے کسی نقطہ سے متعلق ہوں تو $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$ مثبت ہوگا۔

(د) کسی دیے ہوئے خط مستقیم اور ناقص کے نقاط تقاطع

کی تعیین اور اس خط کے منحنی کو مس کرنے کے شرائط۔

فرض کرو کہ خط مستقیم کی مساوات $ما = مرلا + ج$ ہے اور ناقص کی مساوات $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$ ۔

اس خط اور اس منحنی کے مشترک نقطوں کے لیے یہ دونوں مساواتیں صحیح ہونگی لہذا ان مشترک نقطوں پر $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}$ یعنی لا (ب + لا مر) + ۲ مر ج لا + لا = لا (ج - ب) = ۱۔

یہ دو درجی مساوات ہے جس کی دو اصلیں ہونگی حقیقی، منطبق یا خیالی۔ پس لاکہ دو قیمتیں ہونگی اور اُن کو خط مستقیم کی مساوات میں درج کرنے سے ماکہ دو متناظر قیمتیں دریافت ہو جائیں گی۔

لاکہ دو قیمتیں باہم دیگر مساوی ہونگی اگر لا (ج - ب) (ب + لا مر) = مر ج لا یعنی اگر ج = لا مر + ب۔

پس اس صورت میں ماکہ دو قیمتیں بھی مساوی ہونگی۔ پس دو نقطہ جن میں دیا ہوا خط مستقیم ناقص کو منقطع کرتا ہے منطبق ہونگے اگر ج = لا مر + ب۔

پس مر کی جملہ قیمتوں کے لیے خط مستقیم $ما = مرلا + ج$ یا $لا مر + ب$ دیے ہوئے ناقص کو مس کریگا۔ چونکہ جذر المربع کی علامت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے اس لیے واضح ہے کہ مر کی ہر ایک قیمت کے لحاظ سے ناقص کے دو خط ماس ہوتے ہیں جو باہم دیگر متوازی ہیں۔ یہ دو متوازی خط ماس ناقص کے مرکز سے مساوی فاصلوں پر

واقع ہیں۔

(۵) ناقص پر کے کوئی سے دو نقطوں کو ملانے والے وتر کی

مساوات اور منحنی کے کسی نقطہ پر کے خط حماس کی مساوات —
 فرض کرو ناقص پر کے دو نقطوں کے محدود لا، ما اور لا، ما ہیں۔ ان کو
 ملانے والے خط مستقیم کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ما - ما}{ما - ما} \text{ ہے}$$

چونکہ یہ نقطے ناقص پر واقع ہیں اس لیے $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱$ اور $\frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱$

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{لا - لا}{لا} = \frac{ما - ما}{ما}$$

(۱) اور (۲) کے میڈے جانب کے جلوں کو باہر ضرب دینے اور اسی طرح
 ان کے بائیں جانب کے جلوں کو باہر ضرب دینے سے

$$\frac{(لا - لا)(لا + لا)}{لا} = \frac{(ما - ما)(ما + ما)}{ما}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{لا(لا + لا)}{لا} + \frac{لا(لا + لا)}{لا} = \frac{ما(ما + ما)}{ما} + \frac{لا(لا + لا)}{لا}$$

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{لا(لا + لا)}{لا} + \frac{لا(لا + لا)}{لا} = \frac{ما(ما + ما)}{ما} + \frac{لا(لا + لا)}{لا}$$

پس ناقص کے نقطوں (لا، ما) اور (لا، ما) کو ملانے والے خط مستقیم
 یعنی وتر کی یہی مساوات ہے۔ حماس کی صورت میں لا = لا اور ما = ما

$$\text{پس} \quad \frac{لا}{لا} + \frac{ما}{ما} = ۱ \dots\dots\dots (۴) \quad (لا، ما) \text{ پر کے خط حماس}$$

کی مساوات ہے۔

نتیجہ صریح۔ (۱) محور اعظم کے سروں کے محدود (لا، ما) اور (لا، ما) ہیں

پس از روئے مساوات (۲) ان نقطوں پر کے خطوط حماس کی مساواتیں علی الترتیب
 $لا = لا$ اور $لا = لا$ ہیں پس یہ حماس محور اقل کے متوازی ہیں۔ اس طرح
 محور اقل کے سروں پر کے خطوط حماس محور اعظم کے متوازی ہیں۔

(۲) ناقص کے کسی نقطہ $لا$ یا $ما$ پر کا خط حماس نقطہ $(لا - لا)$ پر کے
 خط حماس کے متوازی ہے اور یہ دونوں نقطے منحنی کے مرکز میں سے گزرنے والے
 خط پر واقع ہیں۔

پس ناقص کے مرکز میں سے گزرنے والے کسی وتر کے سروں پر
 خطوط حماس باہم دیگر متوازی ہیں۔

(و) خط $لا + لا + م + ما + ن =$ کے ناقص کو مس کرنے
 کی شرط۔

مبدأ کو ان نقطوں سے ملانے والے خط کی مساوات جہاں خط مستقیم
 $لا + لا + م + ما + ن =$ ناقص $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} =$ اکو قطع کرتا ہے
 $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - \left(\frac{لا + لا + م + ما}{ن} \right) = ۰$ ہے۔

اس لیے کہ $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} = ۱ = \left(\frac{لا + لا + م + ما}{ن} \right)$ پس $\frac{لا}{۱} + \frac{ما}{۲} - \left(\frac{لا + لا + م + ما}{ن} \right) = ۰$ (۱)
 جو ایک متجانس درجہ دوم کی مساوات ہے اور اس لیے مبدأ میں سے گزرنے والے
 دو خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔

اگر دیا ہوا خط ناقص کو دو منطبق نقطوں میں ملتا ہے تو مساوات (۱) دو منطبق
 خطوط کو تعبیر کرے گی۔ لہذا مساوات (۱) کے سیدھے جانب کا جملہ ایک مکمل مربع
 ہونا چاہیے۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$\frac{لا}{۱} - \frac{۱}{۱} = \left(\frac{ما}{۲} - \frac{۱}{۲} \right) \left(\frac{لا}{۱} - \frac{۱}{۱} \right)$$

یعنی $لا + لا + م + ما + ن = ۰$ (۲)

[طریقہ دیگر - خط مستقیم کی مساوات سے ما = (ل + ن)]

پس ناقص کی مساوات ب^۱ لا + لا^۱ ما = و^۱ ب^۱ میں م کی یہ قیمت وجہ کرنے سے

$$ب^۱ م^۱ لا + لا^۱ ز (ل + ن) = و^۱ ب^۱ م^۱$$

یعنی (ب^۱ م^۱ + و^۱ لا^۱) لا + و^۱ ل ن لا + و^۱ (ن - ب^۱ م^۱) = ۰

$$۲ و^۱ ل ن \pm [۴ و^۱ ل ن - ۴ و^۱ (ن - ب^۱ م^۱) (ب^۱ م^۱ + و^۱ ل)]$$

$$۲ (ب^۱ م^۱ + و^۱ ل)$$

لا کی یہ دونوں اصلیں مساوی ہونے کے لیے علامت جذرا المربع کے اندر کا جملہ صفر ہونا چاہیے۔

$$یعنی و^۱ ل ن - (ن - ب^۱ م^۱) (ب^۱ م^۱ + و^۱ ل) = ۰$$

$$\therefore و^۱ ل + ب^۱ م^۱ = ن$$

نتیجہ صیح - خط مستقیم لاجم ط + ماجب ط - ع ناقص کو مس کر گیا اگر

$$(۳) \quad و^۱ لجم ط + ب^۱ م^۱ ط = ع$$

✓ (۴) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عمود کی مساوات -

$$ناقص کے کسی نقطہ (لا، ما) پر کے ماس کی مساوات $\frac{لا}{و} + \frac{ما}{ب} = ۱$$$

اس ماس پر جو خط عمود ہوگا اس کی مساوات $\frac{لا}{و} - \frac{ما}{ب} = ج + ۰ = ۰$ ہے

جس میں ج کوئی مستقل ہے - اس خاص علی القوائم خط کے لیے جو نقطہ لا، ما میں سے گزرتا ہے

$$مساوات \frac{لا}{و} - \frac{ما}{ب} = ج + ۰ = ۰ \text{ پس ج - } \frac{ما}{ب} = \left(\frac{لا}{و} - \frac{۱}{ب} \right)$$

پس ناقص کے نقطہ (لا، ما) پر کے عمود کی مساوات $\frac{لا}{و} - \frac{ما}{ب} = \left(\frac{لا}{و} - \frac{۱}{ب} \right)$ ہے

$$یعنی ما - لا - لا ب + ما و = ۰$$

$$یعنی ما و - لا - لا ب = (ما - لا) ب$$

$$\text{جو بشکل } \frac{لا - لا ب}{ب} = \frac{ما - ما ب}{و} \text{ لکھی جاسکتی ہے۔}$$

ک (ح) کسی نقطہ سے ناقص پر دو خط حماس کھینچے جاسکتے ہیں جو بلحاظ اس کے کہ نقطہ ناقص کے باہر، ناقص کے اوپر یا اُس کے اندر ہو، حقیقی، منطبق یا خیالی ہوتے ہیں -

فصل (۱۰) میں بتایا گیا ہے کہ خط مستقیم جس کی مساوات $ما = مرلا + لا$ اور $ما = مرلا + لا$ ہے ناقص کو چھوتا ہے مگر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو -

خط (۱) نقطہ (لا، ما) میں سے گزرنے کے لیے $ما = مرلا + لا$ اور $ما = مرلا + لا$ چاہیے -

یعنی (لا، ما) - مرلا - $ما = ۰$ یا مرلا (لا، لا) - $ما = ۰$ یا مرلا (لا، لا) - $ما = ۰$ مساوات بلا دو درجی مساوات ہے جس سے ناقص کے ان خطوط حماس کی نسبتیں معلوم ہوتی ہیں جو نقطہ (لا، ما) میں سے گزرتے ہیں - دو درجی مساوات کی دو اصلیں ہوتی ہیں اس لیے کسی نقطہ (لا، ما) میں سے دو ہی خط حماس کھینچے جاسکتے گئے - اس مساوات (۲) کی اصلیں حقیقی، منطبق یا خیالی ہیں بلحاظ اس کے کہ

(لا، لا) (لا، ما) (ما، ما) (ما، لا)

منفی، صفر یا مثبت ہے - یا بانفاظ دیگر بلحاظ اس کے کہ $\frac{لا}{ما} + \frac{لا}{ما} = ۱$ مثبت، صفر یا منفی ہے - یعنی بلحاظ اس کے کہ نقطہ (لا، ما) ناقص کے باہر ہے اس کے اوپر ہے یا اس کے اندر واقع ہے -

ط (ح) کسی نقطہ سے ناقص پر کھینچے ہوئے دو خط حماس کے

نقاط تماس میں سے گذرنے والے خط کی مساوات -

(لا، ما) محدودوں والے نقطہ سے خط حماس کھینچو - اور نقاط تماس کے محدودوں کو علی الترتیب (ح، ک) اور (ح، ک) مانو -

(ح، ک) اور (ح، ک) پر کے خطوط حماس کی مساواتیں $\frac{لا}{ما} + \frac{لا}{ما} = ۱$ اور

لا ح + $\frac{ا}{ب}$ = ۱ ہیں اور ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (لا، ا) ان دونوں خطوں پر واقع ہے۔

پس لا ح + $\frac{ا}{ب}$ = ۱ (۱) اور لا ح + $\frac{ا}{ب}$ = ۱ (۲)

لیکن (۱) اور (۲) کے معائنہ سے واضح ہے کہ (ح، ک) اور (ح، ک) نقطے دونوں

اس خط مستقیم پر واقع ہیں جس کی مساوات $\frac{لا}{ا} + \frac{ا}{ب} = ۱$ (۳) ہے۔
لہذا مساوات (۳) نقطہ (لا، ا) سے کھینچے ہوئے خطوط حماس کے نقاط حماس
میں سے گزرنے والے خط کی مساوات ہے۔

کسی نقطہ ف سے کسی ناقص تک کھینچے ہوئے دو خطوط حماس کے نقاط حماس کو
ملانے والے خط کو ف کا قطبی بمطابق ناقص کہتے ہیں۔

(ی) اگر کسی ناقص کے لحاظ سے نقطہ ف کا قطبی نقطہ ق

میں سے گزرتا ہے تو ق کا قطبی ف میں سے گزرا گیا۔

اس کا ثبوت دائرہ اور مکافی والے مسئلہ کے ثبوت کے بالکل مشابہ ہے۔

(ک) ناقص کے باہر یگر علی القوائم دو خط حماس کے نقطہ

تقاطع کا طریق۔

خط مستقیم جس کی مساوات $ما = مر لا + لا$ ہے ناقص کو مس
کرے گا مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔ اگر ہم لا اور ما کو معلومہ تصور کریں تو یہ مساوات
ان خطوط حماس کی سمتوں کو ظاہر کرتی ہے جو نقطہ (لا، ما) میں سے
گزرتے ہیں۔

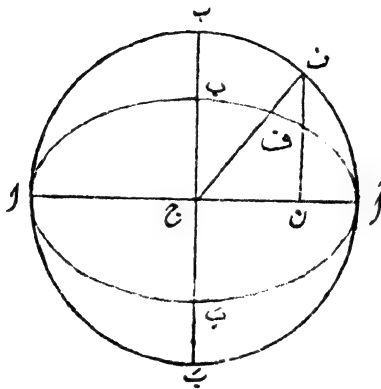
مساوات کو منطبق بنانے سے وہ $مر (لا - لا) - ۲ مر لا + ما - ما = ۰$ ۔

ہو جاتی ہے۔

فرض کرو اس مساوات کی اصلیں مر اور مر ہیں۔ خطوط حماس علی القوائم ہونگے اگر

مر مر = ۱ - ۱ پس $\frac{لا - لا}{مر - مر} = ۱ - ۱$ یعنی لا + ما = لا + مر

پس مطلوبہ طریق کی یہی مساوات ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ طریق ایک دائرہ ہے۔ اس کے ناقص کا مرتبہ دائرہ کہتے ہیں۔
(ل) ناقص کے محورِ اعظم کو قطر مان کر اس پر جو دائرہ کھینچا جاتا ہے امدادی دائرہ کہلاتا ہے۔



شکل ۲۱

اگر ناقص کی مساوات $۱ = \frac{ا^۲}{ب^۲} + \frac{لا^۲}{و^۲}$ مانی جائے تو اس کے امدادی دائرہ کی مساوات $۱ = \frac{ا^۲}{و^۲} + \frac{لا^۲}{ب^۲}$ ہوگی۔

پس اگر ناقص کا کوئی سامعین 'ن' 'ف' آگے کو بڑھا کر امدادی دائرہ سے 'ف' پر ملا دیا جائے تو ان دونوں مساواتوں سے واضح ہے کہ

$$۱ = \frac{ن^۲}{و^۲} + \frac{ن^۲}{ب^۲} \quad \text{اور} \quad ۱ = \frac{ن^۲}{ب^۲} + \frac{ن^۲}{و^۲}$$

$$\text{پس} \quad \frac{ن^۲}{ب^۲} = \frac{ن^۲}{و^۲} \quad \therefore \quad \frac{ن}{ب} = \frac{ن}{و}$$

پس ناقص اور دائرہ کے معینوں کے درمیان ایک مستقل نسبت ہوتی ہے۔
زاویہ 'ا' 'ج' 'ن' نقطہ 'ف' کا خارج مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔

نقطہ ف جو امدادی دائرہ پر واقع ہے ناقص کے نقطہ ف کا متناظر منظر ہوتا ہے۔
اگر زاویہ ارج ف کو فہ سے مخاطب کریں تو ف کے محدد ارجم فہ اور
ا جب فہ ہونگے اور ف کے محدد ارجم فہ اور ب جب فہ

(م) ناقص کے دو نقطوں کے خارج مرکزہ زاویے اگر
دیے جائیں تو ان کو ملانے والے خط کی مساوات۔

فرض کرو کہ ان دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویے فہ اور فہ ہیں
پس ان نقطوں کے محدد ارجم فہ، ب جب فہ اور ارجم فہ، ب جب فہ ہیں
اور ان کو ملانے والے خط کی مساوات

$$\begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{2} \text{ ارجم فہ، ب جب فہ} \\ \hline \frac{1}{2} \text{ ارجم فہ، ب جب فہ} \\ \hline \end{array} = 0$$

مقطعہ کو پھیلانے سے $\frac{1}{2} \text{ (ب جب فہ - ارجم فہ)} + \frac{1}{2} \text{ (ارجم فہ - ب جب فہ)} = 0$
اس مساوات کو جب $\frac{1}{2} \text{ (فہ - فہ)}$ پر تقسیم کرنے سے

$\frac{1}{2} \text{ ارجم فہ} = \frac{1}{2} \text{ (فہ + فہ)} + \frac{1}{2} \text{ (ارجم فہ - فہ)} = \dots (۱)$
یہی مطلوبہ مساوات ہے۔

فہ خارج مرکزہ زاویہ والے نقطہ پر کی مساوات کے لیے مساوات (۱) میں فہ = فہ لکھو

تب $\frac{1}{2} \text{ ارجم فہ} + \frac{1}{2} \text{ ب جب فہ} = 1 \dots \dots \dots (۲)$

مساوات (۱) سے واضح ہے اگر ناقص پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی
زاویوں کا ماحصل جمع مستقل اور ۲ء کے مساوی ہو تو ان نقطوں کو ملانے والا وتر
ہمیشہ خط $\frac{1}{2} \text{ ارجم فہ} + \frac{1}{2} \text{ ب جب فہ} = 1$ کے متوازی ہے۔ یعنی یہ وتر ہمیشہ
خارج مرکزی زاویہ والے نقطہ پر کے خط مماس کے متوازی ہے۔ اس کے
بالعکس ناقص کے متوازی وتروں کے کسی نظام میں کسی بھی

وتر کے سروں پر کے خارج مرکزی زاویوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔
 (ن) ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد کی مساوات اس نقطہ
 کے خارج مرکزی زاویہ کی رقوم میں =
 فرض کرو نقطہ ف کا خارج مرکزی زاویہ ف ہے۔ اس نقطہ پر کے خط مماس
 کی مساوات

$$\frac{لا}{ر} = \text{جہ فہ} + \frac{ب}{ا} \text{ جب فہ} = ا$$

اس پر خط لا جب فہ - $\frac{ما \text{ جہ فہ}}{ر} + ج = ۰$ عمود ہوگا (جس میں ج
 ایک مستقل ہے) چونکہ یہ عمود نقطہ ف میں سے گزرتا ہے اس لیے مساوات
 میں لا اور ما کی قیمتیں (یعنی ا جہ فہ اور ب جب فہ) درج کرنے سے
 $\frac{ا \text{ جہ فہ جب فہ}}{ب} - \frac{ب \text{ جب فہ جہ فہ}}{ر} + ج = ۰$

$$\text{پس ج} = - \frac{(ا - ب) \text{ جب فہ جہ فہ}}{ا ب}$$

$$\therefore \frac{لا \text{ جب فہ}}{ب} - \frac{ما \text{ جہ فہ}}{ر} - \frac{(ا - ب) \text{ جب فہ جہ فہ}}{ا ب} = ۰$$

یعنی لا جب فہ - ب ما جہ فہ - (ا - ب) جب فہ جہ فہ = ۰

$$\text{لہذا} \frac{لا}{جہ فہ} - \frac{ب}{ب \text{ جب فہ}} = ا - ب$$

(س) ناقص کے خارج مرکزی زاویوں فہ فہ والے
 نقطوں پر کے خطوط مماس کے نقطہ تقاطع کے متحدہ -
 فرض کرو کہ اس نقطہ کے متحدہ لا، ما ہیں۔ چونکہ فہ فہ خارج مرکزی

زاویوں کے نقطوں کو ملانے والا وتر نقطہ لا، ما کا قطبی ہے لہذا اس کی مساوات

$$\frac{لا}{لا} + \frac{لا}{ب} = ۱ - \frac{لا}{ب} = ۰ \text{ ہے}$$

لیکن (م) کی مساوات (۱) یعنی $\frac{لا}{و}$ جم $\frac{۱}{۲}$ (فہ + فہ) + $\frac{۱}{۲}$ جب $\frac{۱}{۲}$ (فہ + فہ) = جم $\frac{۱}{۲}$ (فہ - فہ) بھی اسی قطبی کی مساوات ہے۔

$$\text{پس } \frac{لا}{ا} = \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ} = \frac{لا}{ب} \text{ اور } \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ} = \frac{لا}{ب}$$

$$\text{لہذا } \frac{لا}{ا} = \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ} = \frac{لا}{ب} \text{ اور } \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ} = \frac{لا}{ب}$$

[واضح ہے کہ فہ خارج مرکزی زاویہ والے نقطہ کے خط مماس کی مساوات

$\frac{لا}{و}$ جم فہ + $\frac{۱}{۲}$ جب فہ - $۱ = ۰$ میں لا، ما کے عوض لا، ما لکھ کر اور اس طرح فہ زاویہ والے نقطہ کے مماس کی مساوات میں بھی یہی عمل کر کے لا، اور $\frac{۱}{۲}$ کی قیمتیں اخذ کی جاسکتی ہیں۔ طالب علم کو چاہیے بطور مشق اس کی تصدیق کرے۔]

فہ، فہ خارج مرکزی زاویوں والے نقطوں پر کے عمادوں کے نقطہ تقاطع کے متحدہ مساواتوں

$$\frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ا} = \frac{ب}{ا} - \frac{لا}{ا} \text{ اور } \frac{ب}{ا} - \frac{لا}{ا} = \frac{ب}{ا} - \frac{لا}{ا} \text{ اور } \frac{ب}{ا} - \frac{لا}{ا} = \frac{ب}{ا} - \frac{لا}{ا}$$

کے لیے حل کرنے سے حسب ذیل برآمد ہوتے ہیں:-

$$لا = \frac{ب - \frac{۱}{۲} ب}{جم فہ - جب فہ} = \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ}$$

$$ا = \frac{ب - \frac{۱}{۲} ب}{جم فہ - جب فہ} = \frac{جم فہ - جب فہ}{جم فہ - جب فہ}$$

طالب علم کو چاہیے اس کی تصدیق کرے۔

اب ہم ناقص کے چند ہندسی خواص ثابت کریں گے۔

شکل ۲۲ میں فرض کرو کہ نقطہ ف پر کا خط مماس لا اور ما کے محاذوں سے

جہاں عماد لاکے محور کو منقطع کرتا ہے وہاں $ما = ۰$ پس از روئے مساوات (۲)

$$لا - لا = -\frac{ب^۲}{۲ا} \text{ یعنی } لا = لا (۱ - \frac{ب^۲}{۲ا}) = لا \cdot ج \text{ گ} = لا \cdot ج \times ج \text{ ن} \dots (جہ)$$

نیز چونکہ $س گ = س ج + ج گ = لا + لا = اور گ س = لا - لا =$

$$\text{اس لیے } \frac{س گ}{س ن} = \frac{لا + لا}{لا - لا} = \frac{س ف}{س ن}$$

پس $ف گ$ زاویہ $س ف س$ کی تنصیف کرتا ہے (ضہ)

چونکہ $ف گ^۲ = گ ن^۲ + ن ف^۲ = (ج ن - ج گ)^۲ + ن ف^۲$

$$\text{پس } ف گ^۲ = ما^۲ + لا^۲ (۱ - ز^۲) \text{ یعنی } ف گ^۲ = ب^۲ + \frac{لا^۲}{۲ا} + \frac{لا^۲}{۲ا}$$

$$\text{اسی طرح } ف گ^۲ = ز^۲ + \frac{لا^۲}{۲ا} + \frac{لا^۲}{۲ا}$$

$$\text{اور } ف و = ک ج = \frac{۱}{\frac{لا^۲}{۲ا} + \frac{لا^۲}{۲ا}}$$

$$\therefore ف و \times ف گ = ب^۲ \text{ اور } ف و \times ف گ = ز^۲ \dots\dots\dots (صہ)$$

خط مستقیم جس کی مساوات $ما = مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲ \dots\dots\dots (۳)$ ہے

ناقص کو منس کر گیا مر کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو۔

پس اگر $س$ سے $س$ کے ماسکوں سے خط (۳) پر ڈالے ہوئے عمود ہوں تو

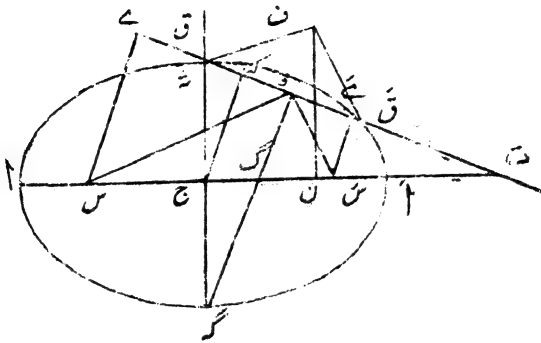
$$س = \frac{مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲}{مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲} \text{ اور } س = \frac{مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲}{مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲}$$

$$\therefore س = س \times س = \frac{مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲}{مر لا + مر^۲ + مر^۲ + ب^۲} \dots\dots\dots (ثہ)$$

س میں سے خط (۳) پر عمود وار گزرنے والے خط کی مساوات $مر ما + لا + لا = ۰ \dots\dots\dots (۴)$ ہے

(اس لیے کہ یہ مساوات $مر ما + لا + لا = مستقل = ۰$ ہے اور چونکہ $س$ کے مجدد۔ $لا$

وہ علی نقیوں کا طریق۔



شکل ۳۳

فہم اور فہم خارج مرکزی زاویوں کے نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$\frac{1}{2} \text{ حجم } (r_1 + r_2) + \frac{1}{2} \text{ حجم } (r_2 + r_3) = \frac{1}{2} (r_1 + r_2 + r_2 + r_3) = \frac{1}{2} (r_1 + 2r_2 + r_3) = \frac{1}{2} (r_1 + r_3 + 2r_2) = \frac{1}{2} (r_1 + r_3) + r_2$$

اگر یہ وتر خفہ مستقیم ما - مد لا = کے متوازی ہی ہو تو نہ $\frac{2}{3}$ نم $\frac{1}{4}$ (فہ + ۱ فہ) (۱) ہے
لیکن اگر (لا ما) وتر کا اصلی نقطہ ہے تو $۲ = ۱$ (جم + ۱ فہ) $\frac{1}{4}$ (فہ + ۱ فہ) $\frac{1}{4}$ (جم - ۱ فہ)
اور $۲ = ب$ (جب فہ + ۱ جب فہ) $\frac{1}{4}$ (فہ + ۱ فہ) $\frac{1}{4}$ (جم - ۱ فہ)

پس $\frac{1}{b} = \frac{1}{r} \cos \frac{1}{2} (\theta_2 + \theta_1) - \frac{1}{r_2} = -\frac{1}{r_2}$ از روی مساوات (۱)

لہذا $\Delta x = \Delta y$ کے متوازی تمام وتروں کے وسطی نقطوں کی طرہ ایک خط مستقیم ہے جس کی مساوات

$$\zeta(r) \dots \dots \frac{r^2}{2} = 1$$

جس سے ظاہر ہے کہ ناقص کے تمام قطب اُس کے مرکز میں سے گزرتے ہیں۔

مسائل (۲) کو اگر شکل ما = مرزا لکھیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ مرزا = $\frac{2}{7} \dots (۳)$

اس رابطہ کے تشاکل سے واضح ہے کہ تمام وتر جو خط $MA =$ مرکز A کے متوازی ہیں خط $MA =$ مرکز A کی تنصیف کرتا ہے۔

پس اگر ناقص کا ایک قطر کسی دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے تو یہ دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے گا۔

تعریف۔ دو قطر مزدوج کہلاتے ہیں جبکہ ایک قطر دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرتا ہے۔

کسی قطر کے سرے پر کا خط MA اس قطر سے تنصیف پانے والے وتروں کا متوازی ہوتا ہے۔

متوازی وتروں کے کسی نظام کے وسطی نقطے سب کے سب ناقص کے ایک قطر پر واقع ہوتے ہیں۔ اس قطر کے سروں پر کے متوازی خطوط MA بھی اس متوازی وتروں کے نظام کے ارکان سمجھے جاسکتے ہیں۔ اس لیے کہ یہ فی الحقیقت وتر ہی ہیں جو دو منطبق نقطوں میں ناقص سے ملے ہیں۔ مثال (۱)۔ ناقص کے ایک قطر پر کے کسی نقطہ کا قطبی مرکز دو قطر کا متوازی ہے۔

اس لیے کہ (لا، لا) میں سے گزرنے والا قطر لا، لا۔ مالا، لا۔ ہے

اور (لا، لا) کا قطبی $\frac{لا، لا}{لا} + \frac{لا، لا}{لا} = ۱ = ۰$ ہے۔ یہ دونوں مساواتیں مزدوج

قطروں کی شرط $مرکز = \frac{لا، لا}{لا}$ کو پورا کرتی ہیں اس لیے کہ مرکز $\frac{لا، لا}{لا}$ اور مرکز $\frac{لا، لا}{لا}$ ۔ پس اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ اگر (لا، لا) ناقص کے کسی وتر کا وسطی نقطہ ہے تو وہ وتر (لا، لا) کے قطبی کا متوازی ہے۔

پس (لا، لا) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات $\frac{لا، لا}{لا} + \frac{لا، لا}{لا} = ۰$ ہے

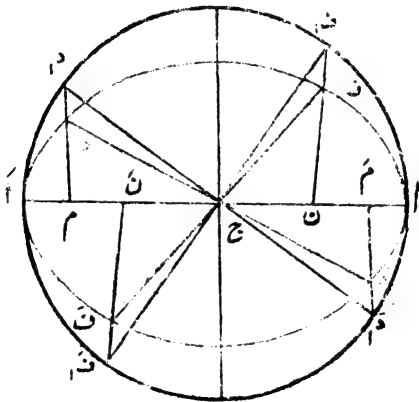
مثال (۲)۔ اگر کسی ناقص کے وتر ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتے ہیں تو ان کے وسطی نقطے ایک دوسرے ناقص پر ہوتے۔

کیونکہ ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ (لا، ما) وسطی نقطہ والے وتر کی مساوات $\frac{(لا-لا)}{۲} + \frac{(ما-ما)}{۲} = \frac{۲}{۲}$ ہے۔
 اگر یہ وتر دیے ہوئے نقطہ (ھ، ک) میں سے گزرتا ہے تو $\frac{(ھ-لا)}{۲} + \frac{(ک-ما)}{۲} = ۰$ ۔
 لہذا نقطہ (لا، ما) ناقص $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} - \frac{ھ}{۲} - \frac{ک}{۲} = ۰$ پر واقع ہے۔

(ب) شکل ۲۴ میں فرض کرو ف د ایک جوڑ مزدوج قطروں کے سرے ہیں۔
 فرض کرو ف کے محدود لا، ما ہیں اور د کے محدود لا، ما ج ف اور ج د کی
 مساواتیں $\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲}$ اور $\frac{لا}{۲} = \frac{ما}{۲}$ ہیں۔

پس (۱) کی مساوات (۳) کی رُو سے $\frac{۲}{۲} = \frac{لا، ما}{۲}$

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{لا، ما}{۲} + \frac{لا، ما}{۲} \quad \therefore$$



شکل ۲۴

اگر ف د، ن م بالترتیب ف اور د کے خارج مرکزی زاویے ہوں تو
 لا، = زوج ف د، ما، = ب جم ف د اور لا، = لجم ف د اور ما، = ب جب ف د،

ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں درج کرنے سے جم فہ، جم فہ + جب فہ، جب فہ = ۰۔

$$\text{یعنی مس فہ} = -\text{جم فہ} \therefore \frac{\pi}{2} - \text{فہ} = -\text{فہ} \text{ پس فہ} \sim \text{فہ} = \frac{\pi}{2}$$

لہذا ناقص کے دوسرے دو قطروں کے سروں پر کے دو نقطوں کے خارج مرکزی زاویوں کا تفاوت ایک زاویہ قائمہ ہے۔
اگر ف، ف، د ج، د ناقص کے قطروں ف، ج، ف، د ج کے متناظر امدادی دائرے کے قطر ہیں تو ف، ج، ف، د ج، د باہر گیر علی القوائم ہونگے۔ اس لیے د اور د کے متحد فوراً ف اور ف کے متحدوں کی قوسوں میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

(ج) دوسرے دو قطر نصف قطروں کے مربعوں کا

حاصل جمع مستقل اور ل + ب کے مساوی ہے۔

فرض کرو ف اور د ناقص کے دوسرے دو قطر کے سروں پر کے نقطے ہیں۔ اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ د مانا جائے تو د کا خارج مرکزی زاویہ ف $\pm \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

ف کے متحد راجم ف، جب ف، ہونگے اور د کے متحد راجم (ف $\pm \frac{\pi}{2}$)، ب، جب (ف $\pm \frac{\pi}{2}$)

$$\therefore \text{ج ف} = \text{راجم ف} + \text{ب جب ف}$$

$$\text{اور ج د} = \text{راجم د} + \text{ب جب د} \quad (\text{ف} \pm \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \text{ج ف} + \text{ج د} = \text{راجم د} + \text{راجم ف}$$

(د) ناقص کے دوسرے دو قطر کے سروں پر مس کرنے والے

متوازی الاضلاع کا رقبہ مستقل اور م ر ب کے مساوی ہے۔

فرض کرو ف، د ج، د ناقص کے دوسرے دو قطر ہیں جو متوازی الاضلاع

ناقص کو ف، د، د پر مس کرتا ہے اس کا رقبہ م ج ف \times ج د جب ف ج د

یا م ج د \times ج ک ہے جس میں ج ک مرکز ج سے ف پر کے خط مماس پر گرایا ہوا

عمود ہے (دیکھو شکل مسئلہ)۔

اگر ف کا خارج مرکزی زاویہ نہ ہو تو د کا خارج مرکزی زاویہ نہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

$$\therefore \text{ج د} = \text{ا}^2 \text{جم}^2 (\text{ف} \pm \frac{\pi}{2}) + \text{ب}^2 \text{جب}^2 (\text{ف} \pm \frac{\pi}{2})$$

یعنی ج د = ا^۲ جب^۲ ف + ب^۲ جم^۲ ف (۱)

اور ف پر کے خطِ مماس کی مساوات $\frac{\text{ا}}{\text{و}} \text{جم}^2 \text{ف} + \frac{\text{ب}}{\text{ل}} \text{جب}^2 \text{ف} = ۱$

$$\therefore \text{ج ک} = \frac{۱}{\frac{\text{ا}}{\text{و}} \text{جب}^2 \text{ف} + \frac{\text{ب}}{\text{ل}} \text{جم}^2 \text{ف}} = \frac{\text{ا}^2 \text{و}^2 \text{ب}^2}{\text{ا}^2 \text{و}^2 \text{جب}^2 \text{ف} + \text{ب}^2 \text{ل}^2 \text{جم}^2 \text{ف}} \dots (۲)$$

پس (۱) اور (۲) سے ظاہر ہے کہ ج د \times ج ک = ا^۲ ب ل، لہذا ناقص کے مزدوج قطروں کے سروں پر تماس رکھنے والے متوازی الاضلاع کا مربع م ا ب کے مساوی ہے۔

(۵) اگر ناقص کے دو مزدوج قطروں ج ف، ج د کے طول بالترتیب ل، ل^۱ ہوں تو چونکہ ج ک = ج ف جب > ج ف ک = ل جب طہ جس میں طہ = زاویہ ف ج د (یعنی مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ) اس لیے ل، ل^۱ جب طہ = ا^۲ ب جس سے ظاہر ہے کہ جب طہ اقل ہے جبکہ ل، ل^۱ اعظم ہے۔

لیکن دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل (= ل^۲ + ل^{۱۲}) ہے۔ لہذا ل، ل^۱ کی قیمت اعظم ہوگی جبکہ یہ قطر ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔ بدین وجہ ناقص کے دو مزدوج قطروں کا درمیانی زاویہ حادہ اقل ہوتا ہے جبکہ یہ مزدوج قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

(۶) فرض کرد ناقص کے دو مزدوج قطروں کے سروں ف، د کے خارج مرکزی زاویے بالترتیب نہ اور نہ $\pm \frac{\pi}{2}$ ہیں۔

$$\text{تب ج ف} = \text{ا}^2 \text{جم}^2 \text{ف} + \text{ب}^2 \text{جب}^2 \text{ف اور ج د} = \text{ا}^2 \text{جب}^2 \text{ف} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{ف}$$

$$\therefore \text{ج ف} - \text{ج د} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2) \text{جم}^2 \text{ف}$$

پس ج ف = ج د جبکہ نہ $\frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2}$ اس لیے مساوی مزدوج قطروں کی

مساواتیں $\frac{a}{b} = \pm \frac{c}{d}$ ہیں (کیونکہ حجم $\frac{\pi}{r} =$ جب $\frac{\pi}{r}$)
 پس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں کی سمتیں اور اس کے
 محوروں کے سروں پر کے محاسوں سے بنے ہوئے مستطیل کے دتروں
 کی سمتیں باہر دیکر منطبق ہیں۔

(۲) تعریف۔ ناقص پر کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں
 کو ملانے والے دو خطوط مستقیم تکمیلی اوتار کہلاتے ہیں۔
 ناقص کے کوئی سے دو تکمیلی وتر ایک جوڑ مزدوج قطروں
 کے متوازی ہوتے ہیں۔

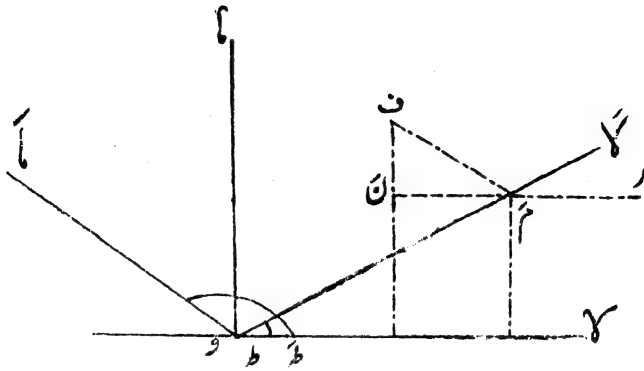
ناقص پر کوئی نقطہ ق فرض کرو اور اس کو قطر ف ج کے سروں ف
 اور ف سے ملاؤ۔ اگر و اور و بالترتیب ق ف اور ق ف کے وسطی نقطے
 ہیں تو ج و اور ج و مزدوج ہیں اس لیے کہ یہ ایک دوسرے کے متوازی دتروں
 کی تعریف کرتے ہیں اور ج و اور ج و بالترتیب ق ف اور ق ف کے متوازی ہیں۔
 پس ق ف اور ق ف ایک جوڑ مزدوج قطروں کے متوازی ہیں۔

۶۳۔ ایک جوڑ مزدوج قطروں کو محور مان کر باسانی ناقص کی مساوات
 حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس کے لیے ہمیں علی القوائم محور والے محدود کو دیے ہوئے
 دوسرے محور والے محدود کی رقومیں ظاہر کرنے کی ضرورت ہے۔

(۱) فرض کرو شکل ۳۵ میں وکلا، و ما علی القوائم محور ہیں اور
 وکلا اور و ما جدید محور ہیں جن کا درمیانی زاویہ سہ ہے۔

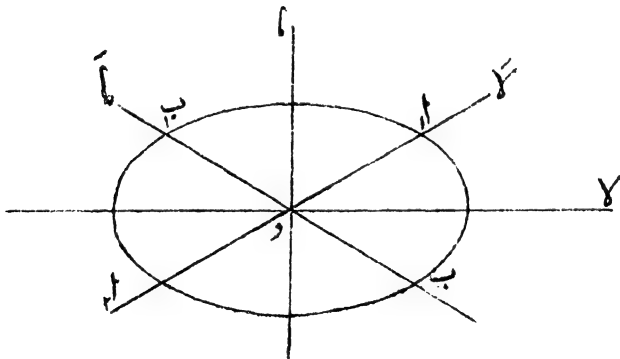
اگر وکلا وکلا = طہ اور وکلا وکلا = طہ تو سہ = طہ - طہ ہے۔
 کسی نقطہ ف کے محدود اول الذکر محوروں کے حوالہ سے لا، ما فرض کرو اور
 آخر الذکر کے حوالہ سے لا اور ما۔

خط ف م محور و ما کے متوازی کھینچو ف م محور و ما کے متوازی م ن
 محور و ما کے متوازی اور م ن محور وکلا کے متوازی۔ تب > م ف = طہ



شکل ۲۵

چونکہ $وم = ون + ن م = ون + م ن = وم$ جسم طہ + م ن جسم طہ
 اور $م ف = م ن + ن ف = م ن + ف ن = م ف$ جسم طہ + م ن جسم طہ
 لہذا $لا = لاجم طہ + ماجم طہ$ اور $ما = لاجم طہ + ماجم طہ$
 (ب) فرض کرو شکل ۲۵ میں $ا$ ، $ار$ اور $ب$ بم ناقص کے مزدوج
 قطر ہیں اور یہ محور مانے جاتے ہیں۔



شکل ۲۶

ولا، واما کے حوالے سے ناقص کی مساوات $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱ \dots\dots (۱)$ ہے
 $> لا ولا = ط$ اور $> ما ولا = ط$

پس لا = لا جم ط + ما جم ط اور ما = لا جب ط + ما جب ط $\dots\dots (۲)$
 ۶۲- (۱) کی مساوات (۳) سے مس ط مس ط = $\frac{ما}{۲} - \frac{لا}{۲}$

یعنی $\frac{جب ط جب ط}{ما} + \frac{جم ط جم ط}{لا} = \dots\dots (۳)$

مساوات (۱) میں لا اور ما کی نئی قیمتیں درج کر کے ترتیب دینے سے

$$1 = \left(\frac{جم ط}{ما} + \frac{جب ط}{لا}\right) ۲ + \left(\frac{جم ط جم ط}{ما} + \frac{جب ط جب ط}{لا}\right) لا$$

$$(۳) کی رو سے لا ما کا صفر ہے پس \left(\frac{جم ط}{ما} + \frac{جب ط}{لا}\right) لا = ۱ - \left(\frac{جم ط جم ط}{ما} + \frac{جب ط جب ط}{لا}\right) ما = ۱$$

اس مساوات میں ما کو صفر لکھنے سے نصف قطر و لا کی قیمت $\frac{۱}{\frac{جم ط}{ما} + \frac{جب ط}{لا}}$ برآمد ہوتی ہے۔

جس کو ہم وے تعبیر کریں گے۔ اسی طرح لا کو صفر لکھنے سے وہی قیمت $\frac{۱}{\frac{جم ط}{ما} + \frac{جب ط}{لا}}$ ہوتی ہے۔

اگر اس کو بے سے تعبیر کریں تو ناقص کی مساوات مزدوج قطروں کے حوالے سے

$$\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱ \text{ ہے}$$

پس $\frac{لا}{۲} + \frac{ما}{۲} = ۱$ ناقص کی مساوات ہے جب کہ نصف طول لا اور بے والے مزدوج

قطر کے حوالے کے محور مانے جاتے ہیں۔

مثال (۱) ناقص کے محور اعظم کے سروں پر کے خطوط ماس ناقص کے کوئی

سے خط ماس سے ت اور ت نقطوں پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ وہ دائرہ جس کا قطر

ت سے ماسوں میں سے گزرے گا۔

فرض کرو ناقص کے کسی نقطہ کے محدود لا، ما ہیں اس نقطہ پر کے خط ماس کی

فرض کرو ف کے محدود (لا، ما) ہیں اور ف کے محدود (لام، مار)۔

$$\text{تب } 1 = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}} \text{ اور } 1 = \frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}$$

$$\text{پس } \frac{(\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا})}{(\text{لا} - \text{لا}) (\text{لا} + \text{لا})} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

لیکن ما = ن ف، ل + لا = آج + ج ن، اُن جس میں ج ناقص کا مرکز ہے
ل - لا = ج ا - ج ن، ن ا = ما، ن ف، ل + لا = اُن اور ل - لا = ن ا

$$\text{پس } \frac{\text{اُن} \times \text{ن ا}}{\text{اُن} \times \text{ن ا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}}$$

نویں باب کی مثالیں

(۱) اگر کسی ناقص کے مرکز پر کا عماد محور اعظم کا چوتھائی طول رکھتا ہے تو ناقص کی مسادات اور اس کا خروج مرکز دریافت کرو۔

(۲) ۲ لا + ۳ ما = ۱ دیا جاتا ہے اس کے نصف محور ماسکے اور مرتب دریافت کرو۔

(۳) ثابت کرو کہ ناقص میں (ل) محور اقل کا نصف اُس اور س ا کا ایک اوسط تناسب ہے۔ (ب) ماسکے پر کا عماد اُس اور اُس کا ایک موسیقی اوسط ہے۔ (۱۲) ناقص کا محور اعظم ہے اور س، س اُس کے ماسکے ہیں۔

(۴) ثابت کرو کہ ناقص $\frac{\text{لا}}{\text{ب}} + \frac{\text{لا}}{\text{ب}}$ کے ایسے خطوط ماس کی مساوتیں جو محوروں پر مساوی نقطے بناتی ہیں۔

$$\text{لا} \pm \text{ما} \pm \frac{\text{لا} + \text{لا}}{\text{ب}} = ۰ \text{ ہیں۔}$$

(۵) اگر ناقص پر کے کسی نقطہ ف کے ماسکی فاصلے س ف، س ف ہوں

ج ناقص کا مرکز ہو اور ج د قطر ج ف کا مزدوج ہو تو بتاؤ کہ سن ف سن ف ج د
(۶) ناقص کا محور اعظم ا ج ا ہے۔ ناقص پر کے کسی نقطہ ف پر کا
خط مماس نقطہ ا پر کے خط مماس سے نقطہ ی پر ملتا ہے۔ ثابت کرو کہ
ج ی خط ا ف کا متوازی ہے۔

(۷) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو متقاطع خطوط مستقیم سے اس کے فاصلوں
کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا طریق ایک ناقص ہے۔ اور
بتاؤ کہ ان خطوط کے درمیانی زاویہ کی رقبوں میں ناقص کا خروج مرکز کیا ہے۔

(۸) ف ق ناقص پر دو ثابت نقطے ہیں اور س اس پر کا کوئی ایک اور
نقطہ ہے۔ وو خطوط ف س، ق س کے وسطی نقطے ہیں اور وگ، وگ بالترتیب
ف س، ق س پر عمود ہیں اور محور سے گ، گ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ گ گ
مستقل ہے۔

(۹) ایک دیے ہوئے ماسکہ اور اس کے متناظر مرتب کے ناقصوں کا ایک سلسلہ
کھینچا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ان کے اقل محوروں کے سروں کا طریق ایک مکانی ہے۔

(۱۰) ف ن ف ایک ناقص کا دوہرا معین ہے اور ق منحنی پر کوئی سا ایک
نقطہ ہے۔ اگر ق ف ق ف محور اعظم سے علی الترتیب م، م نقطوں میں ملے
تو ج م x ج م = ج ا

(۱۱) ناقص کے ماسکوں میں سے گزرتے ہوئے مزدوج قطروں کے ایک جوڑ
کے بالترتیب علی القوام خطوط کھینچے جاتے ہیں جو نقطہ ق پر متقاطع ہوتے ہیں ثابت کرو
کہ ق کا طریق ایک ہم مرکز ناقص ہے۔

(۱۲) اگر ف د مزدوج قطروں کے سرے ہیں اور نقطہ ف پر کا خط مماس
محور اعظم کو نقطہ ت میں منقطع کرتا ہے اور نقطہ د پر کا مماس محور اقل کو ت میں منقطع کرتا
ہے تو بتاؤ کہ ت مساوی مزدوج قطروں میں سے ایک قطر کے متوازی ہوگا۔

(۱۳) ثابت کرو کہ ناقص پر کے کسی نقطہ کا عماد خط مماس پر مرکز اور
دونوں ماسکوں پر سے ڈالے ہوئے عمودوں کا چوتھا متنااسب ہے۔

(۱۴) ف ن ف ناقص کا ایک دوہرا معین ہے اور ف پر کا عماد

دسواں باب

خط زائد کی مساواتیں

۶۳۔ تعریف — جب کوئی نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اُس کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ سے (جو ماسک کہلاتا ہے) ایک ثابت خطِ مستقیم کے فاصلہ کے ساتھ (جو کہ مرتب کہلاتا ہے) اکائی سے زائد مستقل نسبت رکھتا ہے تو اس نقطہ کا طریق خطِ زائد ہے۔

(۱) خطِ زائد کی مساوات — فرض کرو کہ شکل ۳ میں س ماسک اور ی م مرتب ہے۔ س ی مرتب پر عمود کھینچو۔ ی س کو نقطہ ۱ پر اس طرح تقسیم کرو کہ $\frac{س}{۱} = \frac{۱}{ی}$ جس میں ز ایک سے زائد عدد ہے۔ تب ۱ سبھی پر کا ایک نقطہ ہوگا۔

س ی کو آگے بڑھانے سے ایک دوسرا نقطہ ۲ ایسا ہوتا ہے کہ آگے بڑھانے کے لیے $\frac{س}{۲} = \frac{۲}{ی}$ جس کو ۲ کا وسطی نقطہ مانو اور طول ۲ کو ۱۲ تب $س ۱ = ۱ ۲$ اور $س ۲ = ۲ ۱$ اور $س ۱ = ۱ ۲$ اور $س ۲ = ۲ ۱$

$$\therefore س ۱ + ۱ ۲ = ۱ ۲ + ۲ ۱ = (س ۱ + ۱ ۲)$$

پس $س ۲ = ۲ ۱$ اور $س ۱ = ۱ ۲$ اور $س ۲ = ۲ ۱$ اور $س ۱ = ۱ ۲$ (۱)

$$نیز س ۱ - ۱ ۲ = ۲ ۱ - (س ۱ - ۱ ۲)$$

$$یعنی ۱ ۱ = ز (۱ ۲ - ۲ ۱)$$

متوازی کھینچی جائے۔ اس کا طول معلوم کرنے کے لیے مساوات (۴) میں $\lambda = 1$ اور $\lambda = 1$ لکھو۔

تب $\lambda^2 = \lambda^2 (1 - 1) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2}$ اس لیے کہ $\lambda^2 = \lambda^2 (1 - 1)$ پس نصف وتر خاص کا طول $\frac{\lambda^2}{\lambda^2}$ ہے۔

مساوات (۴) میں λ کی قیمت λ^2 سے کم نہیں ہو سکتی ورنہ λ^2 منفی مقدار ہوگی۔ جس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ قطع زائد کا کوئی حصہ $\lambda = 1$ اور $\lambda = 1$ کے درمیان واقع نہیں ہو سکتا۔

اگر λ کی قیمت λ^2 سے زائد ہو تو λ^2 مثبت مقدار ہوگی اور λ کی کسی خاص قیمت کے لیے λ کی دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہوں گی۔ لہذا λ کا محور منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں پر تقسیم کرتا ہے۔

λ کی کسی بھی قیمت کے لیے λ^2 مثبت ہے اور λ کی کسی خاص قیمت کے لیے λ دو مساوی اور باعتبار علامت متضاد قیمتیں ہوں گی۔ پس λ کا محور بھی منحنی کو دو مشابہ اور مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر λ کے محور پر

λ اور λ^2 ایسے نقطے لیے جائیں کہ $\lambda = \lambda^2$ اور $\lambda = \lambda^2$ جیسا کہ علی القوام جو خط کھینچا جائیگا اس ماسک کا مناظر مرتب ہوگا۔

اگر λ کوئی سا ایک نقطہ ہے جو قطع زائد پر واقع ہے تو واضح ہے کہ نقطہ (λ, λ) بھی اسی منحنی پر واقع ہوگا۔ لیکن مصرعہ بالا دو نقطہ مبدا میں سے گزرنے والے خط مستقیم پر واقع ہیں اور مبدا سے مساوی فاصلے رکھتے ہیں۔ لہذا مبدا میں سے قطع زائد کا جی کوئی وتر کھینچا جاتا ہے مبدا اس کی تنصیف کرتا ہے اور اس لیے منحنی کا مرکز کہلاتا ہے۔

مساوات (۴) سے یہ بھی ہوتا ہے کہ اگر λ کی قیمت λ^2 سے زائد ہو تو λ^2 ایک مثبت مقدار ہوگی اور جیسے جیسے λ کی قیمت بڑھتی جائیگی ویسے λ کی قیمت بھی بڑھتی جائیگی۔ اور λ اور λ^2 کے اس طرح بڑھتے جانے کی کوئی حد یا انتہا نہیں ہے۔ پس اس منحنی کی عام شکل ایسی ہی ہے جیسے کہ شکل ۳۳ میں

بتائی گئی ہے۔ یعنی وہ دو نامتناہی بڑی شانوں پر مشتمل ہے۔

۱۲ قطع زائد کا قاطع محور کہلاتا ہے۔ ۱۲ کے علی القوائم ج میں سے گزرنے والا خط منحنی سے کسی حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے۔ لیکن اگر اس خط پر ب اور ب' دو ایسے نقطے لیے جائیں کہ $ب ج = ج ب' = ب$ تو خط ب ب' مزدوج محور کہلاتا ہے۔

(ب) قطع زائد پر کے کسی نقطہ کے ماسکی فاصلوں کی تعیین

ن شکل ۲ میں چکر کس ف = ز × ف م

لہذا س ف = ز × ی ا = (ز ا ج ن - ج ی) = ز (لا - لا) = ز × لا - لا
اس طرح س ف = ز × م ف = ز (ج ن + ج ی) = ز (لا + لا) = ز × لا + لا
پس س ف - س ف = س ف = ۲

(قبل ازیں نویں باب میں بتایا گیا تھا کہ قطع ناقص کے لیے س ف + س ف = ۲)

(ج) اگر مرکز کو قطب مان کر قطع زائد کی قطبی مساوات معلوم کرنا مقصود ہو تو اس کی کارٹیزی مساوات $\frac{۲}{۱} - \frac{۲}{ب} = ۱$ میں بجائے لا کے م رجم ط اور بجائے

ما کے م ر جب ط لکھنا چاہیے۔ تب

$$\frac{۲}{۱} - \frac{۲}{ب} = ۱ \text{ یعنی } \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{ب} - \frac{۱}{۲} \text{ ج م ط جب } \frac{۲}{ب} \dots (۱)$$

جس کو $\frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} - (\frac{۱}{ب} + \frac{۱}{۲})$ جب ط (۲) بھی لکھ سکتے ہیں۔

اس مساوات کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جب ط کی قیمت صفر ہوتی ہے تو $\frac{۱}{ب}$ اعظم ہے۔ اور اس لیے م ر اقل ہے۔ جیسے جیسے ط بڑھتا جاتا ہے کسر $\frac{۱}{ب}$ گھٹتی ہے اور اس کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ جبکہ جب ط = $\frac{۲}{۱}$ - پس ط کی اس قیمت پر س نامتناہی بڑا ہوتا ہے۔ اگر جب ط کی قیمت $\frac{۲}{۱} + ۲$ سے زیادہ ہو تو $\frac{۱}{ب}$ منفی مقدار ہوگی یعنی جو نیم قطری سمتی محور کے ساتھ جب ط $\frac{۲}{۱} + ۲$ سے بڑھ کر زاویہ بناتا ہے منحنی سے حقیقی نقطوں پر نہیں ملتا ہے۔

(د) قطع ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو نتائج اخذ کیے گئے تھے ان میں سے اکثر قطع زائد پر بھی صادق آتے ہیں۔ ان کے ثبوت کے لیے صرف ب^۱ کی علامت تبدیل کر دینا کافی ہے۔ بدین وجہ یہ نتائج یہاں محض قلمبند کیے جاتے ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ سابقہ باب کی متناظر وضعوں میں ان کا حوالہ دیکھ لے۔

(۱) خط م = م^۱ لا + م^۲ لا - م^۳ ب^۱ م کی جملہ قیمتوں کے لیے خط زائد کا خط ماکس ہے۔

(۲) نقطہ (لا، م^۱) پر کے خط ماکس کی مساوات $\frac{لا}{۲} - \frac{م}{۲} = ۱$ ہے۔

(۳) نقطہ (لا، م^۱) کے قطبی کی مساوات $\frac{لا}{۲} - \frac{م}{۲} = ۱$ ہے

(۴) نقطہ (لا، م^۱) پر کے عمود کی مساوات $\frac{لا - لا}{۲} = \frac{م - م}{۲}$ ہے

(۵) خط ل لا + م م = ن خط زائد کو مس کرے گا اگر ل^۱ ل - ب^۲ م^۲ = ن^۲

(۶) خط لا جم^۱ م + اجب^۱ م = ع منحنی کو مس کرے گا اگر ع^۲ = لا جم^۱ م - ب^۲ اجب^۱ م

(۷) خط زائد کے مرتب دائرہ کی مساوات لا + م^۲ = ل^۱ - ب^۲ ہے۔ واضح ہے کہ

یہ مرتب دائرہ محض خیالی ہوتا ہے جبکہ ل کی قیمت ب سے کم ہو۔ اور صفر ہو جاتا ہے جبکہ ل = ب

(۸) خط ناقص کے متعلق سابقہ باب میں جو ہندسی مسائل ثابت کیے گئے تھے

وہ خط ناقص پر بھی صادق آتے ہیں۔

(۹) خط م = م^۱ لا کے متوازی تمام وتروں کے وسطی نقطوں کا طریق

م = م^۱ لا ہے جس میں م^۲ = $\frac{لا}{۲}$

(۱۰) خطوط م = م^۱ لا اور م = م^۲ لا مزدوج ہیں اگر م^۲ = $\frac{لا}{۲}$

یہ دونوں قطر منحنی سے ایسے نقطوں پر ملتے ہیں جن کے فصلوں یا مقطوعوں کی مساواتیں

$$لا^۲ = \left(\frac{لا}{۲} - \frac{م}{۲} \right)^۲ \text{ اور } لا^۲ = \left(\frac{لا}{۲} - \frac{م}{۲} \right)^۲ = ۱ \text{ ہیں۔}$$

پہلی مساوات سے لا کی حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر م کی قیمت $\frac{ب}{ا}$ سے کمتر ہو۔ اور دوسری مساوات سے حقیقی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اگر م کی قیمت $\frac{ب}{ا}$ سے کمتر ہو۔ لیکن چونکہ م م = $\frac{ب}{ا}$ اس لیے م اور م دونوں $\frac{ب}{ا}$ سے کمتر نہیں ہو سکتے اور نہ دونوں اس سے زائد ہو سکتے ہیں۔ پس خط زائد کے دو مزدوج قطروں میں سے ایک قطر اس منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملتا ہے اور دوسرا خیالی نقطوں میں۔

اگر م = $\frac{ب}{ا}$ تو دونوں مزدوج قطر باہمی منطبق ہو جاتے ہیں۔
(۱) فرض کرو ف اور د مزدوج قطروں کے ایک جوڑ کے سرے ہیں۔ ف کے محدد لا، ما ہیں اور د کے لا، ما۔ ابھی ابھی ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ان دو نقطوں میں سے ایک نقطہ حقیقی ہے تو دوسرا نقطہ خیالی ہوگا۔
ج ف اور ج د کی مساواتیں $\frac{لا}{ا} = \frac{ب}{ا}$ اور $\frac{لا}{ا} = \frac{ب}{ا}$ ہیں پس ان دونوں کے نتیجہ ۹ (د)

$$(۱) \dots\dots\dots = \frac{\frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ا}}{\frac{لا}{ا} - \frac{ب}{ا}} \quad \text{پس} \quad \frac{لا}{ا} = \frac{ب}{ا}$$

چونکہ (لا، ما) اور (لا، ما) دونوں نقطے منحنی پر واقع ہیں۔ لہذا

$$\frac{لا}{ا} = (۱ + \frac{ب}{ا}) = (۱ - \frac{ب}{ا}) \quad \text{یا} \quad \frac{لا}{ا} = - \frac{ب}{ا}$$

$$\therefore لا = \pm \frac{ب}{ا} \dots\dots (۲) \text{ اور اس لیے ان دونوں کے } لا = \pm \frac{ب}{ا} \dots\dots (۳)$$

$$(۲) \text{ اور } (۳) \text{ مساواتوں سے ج ف + ج د = لا + ما = } \frac{ب}{ا} - \frac{ب}{ا} = ۰$$

$$= (۱ - \frac{ب}{ا}) - (۱ + \frac{ب}{ا}) = - \frac{ب}{ا}$$

پس قطع ناقص کی طرہ قطع زائد کے دو مزدوج قطروں کے مربعوں کا حاصل جمع مستقل ہے۔

(ز) تعریف - کسی منحنی کا متقارب ایک ایسا خط مستقیم ہے جو اس منحنی سے لاتناہی پر دو نقطوں میں ملتا ہے لیکن جو لاتناہی پر بالکل واقع نہیں ہے۔

قطع زائد کے متقارب کی تعیین - خط مستقیم $a = m + c$ جن نقطوں پر قطع زائد $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{p}$ کو قطع کرتا ہے ان کے فضے مساوات

$$\frac{a}{b} - \frac{(m+c)}{d} = \frac{1}{p} \text{ یعنی } \frac{a}{b} - \left(\frac{m}{d} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p} \text{ اور } \frac{2m}{d} - \frac{c}{b} - 1 = 0$$

سے دریافت ہوتے ہیں۔ اس مساوات کی دونوں اصلیں نا متناہی ہو جاتی ہیں اگر a اور b دونوں کے سر صفر ہوں۔ یعنی اگر $\frac{1}{p} - \frac{1}{d} = \frac{m}{b}$ اور $m = 0$ پس اس صورت میں $c = 0$ اور $m = \pm \frac{b}{d}$

لہذا قطع زائد $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{p}$ کے دو حقیقی متقارب ہوتے ہیں جن کی مساواتیں $a = \pm \frac{b}{d}$ لائیں۔ اگر ان کو ایک ہی مساوات میں لکھا جائے تو $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{p}$ ہے۔ b میں سے خطوط مستقیم منحنی کے قاطع محور کے متوازی کھینچو اور a میں سے خطوط مزدوج محور کے متوازی کھینچو۔ تب اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ منحنی کے متقارب شدہ مستطیل کے وتر ہیں۔ قطع ناقص کے کوئی حقیقی نقطے لاتناہی پر واقع نہیں ہیں اور اس لیے ناقص کے متقارب خیالی ہیں۔

فصل (ح) کے آخری نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ قطع زائد کے متقارب منطبق مزدوج قطروں کے ایک جوڑ پر واقع ہیں۔ متقارب کے متوازی کھینچا ہوا خط منحنی سے لاتناہی پر ایک نقطہ میں ملتا ہے۔

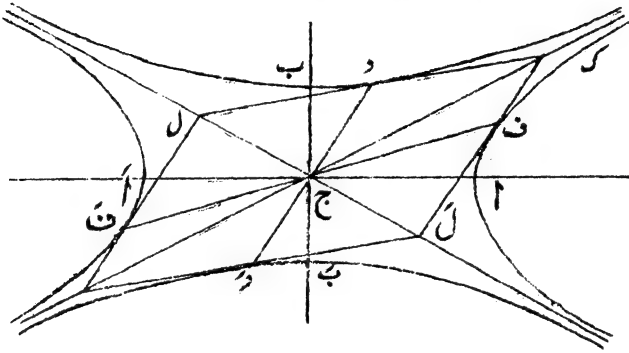
اس لیے کہ مساوات $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{p}$ اور $\frac{2m}{d} - \frac{c}{b} - 1 = 0$ کی ایک

اصل نا متناہی ہو جاتی ہے اگر a کا سر صفر ہو۔ یہ شرط اس صورت میں پوری ہوتی ہے جبکہ $m = 0$ ۔ پس خط مستقیم $a = \pm \frac{b}{d}$ اور $c = 0$ قطع زائد سے

لا تثنای پر ایک نقطہ میں ملتا ہے ج کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو -
(ح) جس قطع زائد کا قاطع محور ب ب ہے اور مزدوج محور ۲۲ اس کی مساوات

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{۲۲}{ب} - \frac{۲۲}{۲} -$$

یہ قطع زائد اور (۲) مساوات کا ابتدائی قطع زائد
باہر دیگر مزدوج کہلاتے ہیں - دیکھو شکل ۳۸



شکل ۳۸

ذیل میں مزدوج زائد قطعوں کے جوڑ کی چند مساواتیں درج کی جاتی ہیں :-

- (۱) دونوں زائد قطعوں کے ایک ہی متقارب ہوتے ہیں -
(۲) اگر دو قطر ان دو زائد قطعوں میں سے ایک زائد قطع کے لحاظ سے مزدوج ہوں تو وہ دوسرے زائد قطع کے لحاظ سے بھی مزدوج ہونگے جیسا کہ فصل ۷ (۹) سے مستنبط ہوتا ہے -

(۳) مصرعہ بالا مزدوج زائد قطعوں کی مساواتیں جیسا کہ فصل (ج) میں بتایا گیا ہے، بشکل

$$\frac{۱}{رہ} = \frac{۲۲}{ب} - \frac{۲۲}{۲} \text{ اور } \frac{۱}{رہ} = \frac{۲۲}{ب} - \frac{۲۲}{۲} \text{ لکھی جاسکتی ہیں۔}$$

واضح ہے کہ اگر ط کی کسی قیمت کے لیے سڑ ایک منحنی کے لیے مثبت ہے تو وہ دوسرے منحنی کے لیے منفی ہوگا۔

پس ہر ایک قطر ایک منحنی سے حقیقی نقطوں میں ملیگا اور دوسرے منحنی سے خیالی نقطوں میں ملیگا۔ معیناً ان دو منحنیوں کے نصف قطروں کے طول ط کی جملہ قیمتوں کے لیے رابطہ سڑ = - سڑ کے ذریعہ مربوط ہیں۔

(۴) اگر دوسرا زوج قطر مساوات (۲) اور مساوات (۱) والے منحنیوں کو علی الترتیب

ف اور د نقطوں میں قطع کرتے ہیں تو ج ف = ج د = ل ب

فرض کرو ف کے محدود ل، م ہیں اور د کے محدود ل، م

تب خطوط مستقیم ج ف اور ج د کی مساواتیں

$$\frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0 \quad \text{ہیں}$$

مردوج قطروں کی شرط یعنی م م = م م سے مساوات

$$\frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0 \quad \dots \dots \dots (۳) \quad \text{حاصل ہوتی ہے}$$

$$\left(\frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0 \right) \text{ اور } \left(\frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0 \right) \text{ پس } \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0 \text{ م م} = \left(\frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} \right)$$

$$\text{پس } \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م}$$

اور چونکہ نقطہ (ل، م) منحنی (۲) پر واقع ہے اور نقطہ (ل، م) منحنی (۱) پر لہذا

$$\frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = \left(1 - \frac{ل}{ل} \right) \frac{م}{م} \quad \text{یا} \quad \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م}$$

$$\therefore \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} \quad \dots \dots (۴) \quad \text{اور اس لیے مساوات (۳) سے } \frac{ل}{ل} \pm \frac{م}{م} = 0 \quad \dots \dots (۵)$$

$$\text{پس ج ف} - \text{ج د} = \frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} - \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0$$

$$= \frac{ل}{ل} + \frac{م}{م} - \frac{ل}{ل} - \frac{م}{م} = 0$$

$$\therefore \text{ج ف} - \text{ج د} = 0$$

لیکن آخر الذکر مساوات منحنی (۲) کے نقطہ (- لا، - ما) پر کے خطِ ماس کی مساوات ہے اور یہ نقطہ 'ف' میں سے گزرنے والے قطر کا دوسرا سر ہے۔
پس ایک قطع زائد پر کے کسی نقطہ 'ف' سے اس کے مزدوج قطع زائد پر خطوط ماس 'ف' 'ف' کیسے جائیں تو خط 'ق' ابتدائی قطع زائد کو 'ف' میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سر پر مس کرے گا۔

(ط) کوئی سے مزدوج قطروں کے جوڑ کو محورِ ماس کو قطع زائد کی مساوات کی تعیین۔ قاطع اور مزدوج محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات

$$\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب} = ۱$$
 ہے۔

چونکہ مبداء میں کوئی تبدیلی نہیں کی جاتی ہے اس لیے نئی مساوات حاصل کرنے کی خاطر بجائے لا، ما کے ہم ل، لا + م، ما اور ل، لا + م، ما لکھتے ہیں۔ اس سے مساوات

$$\frac{(ب\ ل + ل\ ل)}{ب} + \frac{(ب\ ما + ل\ ما)}{ب} = ۱$$

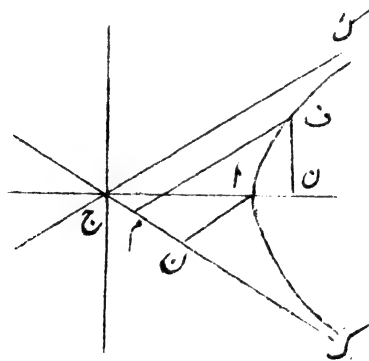
حاصل ہوتی ہے جو شکل ۱ لا + ۲ ح لا + ما + ب = ۱ (۱) ہے۔
ہم نے چونکہ دو مزدوج قطروں کو محور مانا لا کا محور ما کے محور کے دتروں کی تفسیر کرتا ہے۔
پس لا کی کسی ایک مخصوص قیمت کے لیے از روئے مساوات (۱) ما کی دریافت شدہ دونوں قیمتیں مساوی و باہدگیر مخالف ہونی چاہئیں۔ جس کے معنی یہ ہوئے کہ

$$ح = ۰$$
 اور منحنی کی مساوات شکل ۱ لا + ب = ۱ (۲) ہوگی۔
ہم جانتے ہیں کہ ان دو نصف مزدوج قطروں میں سے ایک حقیقی ہے اور دوسرا خیالی۔ پس اگر ان کے طول ل اور ل' اور ل' - ل ب فرض کیے جائیں تو چونکہ یہ طول علی الترتیب لا اور ما کے محوروں پر کے مقطوعے ہیں لہذا مساوات (۲) میں ما اور لا کو علیحدہ علیحدہ صفر لکھنے سے

$$ل' - ل = ۱$$
 اور
$$ب (ل' - ل) = ۱$$
 یعنی
$$\frac{۱}{ل'} - \frac{۱}{ل} = ۱$$
 اور
$$\frac{۱}{ب} = ۱$$
 ہے۔
پس ان نئے محوروں کے حوالہ سے قطع زائد کی مساوات
$$\frac{ل'}{ب} - \frac{ل}{ب} = ۱$$
 (۳) ہے
چونکہ اس مساوات کی شکل وہی ہے جو ابتدائی مساوات کی تھی لہذا وہ جملہ تحقیقات جس میں منحنی کے محور باہدگیر علی القوام نہیں مانے گئے تھے حالیہ محوروں کے

ساتھ بھی برقرار رہتی ہیں۔ مثلاً $\frac{1}{1}$ ، $\frac{2}{2}$ ، $\frac{3}{3}$ ، $\frac{4}{4}$ اور $\frac{5}{5}$ میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی۔ اسی طرح متقاربوں سے متعلق نتائج بھی جن کا ذکر غے میں آیا ہے برقرار رہتے ہیں۔ پس قطع زائد $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ کے مقاربوں کی مساوات $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ہے۔

(۱) خط زائد کی مساوات، اس کے متقاربوں کو محدودوں کے محسوس مان کر۔ فرض کرو کہ شکل ۳۹ میں ج ک، ج ک قطع زائد کے متقارب ہیں اور زاویہ ا ج ک = ع یعنی مس ع = $\frac{\pi}{2}$ ، ف قطع زائد پر کا ایک نقطہ ہے جس کے محدود ج ک لا اور ج ک محوروں کے حوالہ سے لا، ما ہیں اور ج ک، ج ک محوروں کے حوالہ سے لا، ما ہیں۔ خط ف م، ج ک کے متوازی کھینچو اور اس کو ج ک سے نقطہ م میں ملنے دو۔ اور خط ف ن قاطع محور کے علی القوائم کھینچو۔



شکل ۳۹

تب ج م = لا، م ف = ا، ج ن = لا، ن ف = ما

چونکہ ج ن = ج م جم ع + م ف جم ع

$$(1) \dots \dots \dots + \text{جم} (1 + 1) = 2$$

اور چونکہ ن ف م و ج ب ع - ج م جب ع

(۲) $(\bar{1} - \bar{1}) = 1$ جبکہ

پس مساوات $\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_1}{r_2} =$ ایسے یقیناً درج کرنے سے مساوات

$$\text{جم}^2 \text{ع} (لا + ما) = \frac{\text{جب}^2 \text{ع} (ما - لا)}{ب} = ۱ \dots (۳) \text{ حاصل ہوتی ہے۔}$$

$$\text{لیکن مس}^2 \text{ع} = \frac{ب}{ا} \text{ پس } \frac{\text{جب}^2 \text{ع}}{ب} = \frac{\text{جم}^2 \text{ع}}{ا} = \frac{۱}{لا + ب}$$

پس اذروئے مساوات (۳) $ما - لا = ا + ب$
یعنی متقاربوں کو جب حوالہ کے محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات
 $ما - لا = ا + ب$ برآمد ہوتی ہے۔

اسی طرح مزدوج قطع زائد کی مساوات متقاربوں کے حوالہ سے
 $ما - لا = - (ا + ب)$ حاصل ہوتی ہے۔

(ک) علی القیام محدودوں کے حوالہ سے قطع زائد، اس کے متقاربوں اور مزدوج
قطع زائد کی مساواتیں علی الترتیب

$$\frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} = ۱ \quad ، \quad \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} = ۰ \quad \text{اور} \quad \frac{لا}{ا} - \frac{ما}{ب} = -۱ \quad \text{ہیں}$$

اگر محدودوں کے محور کسی طرح سے بھی بدلے جائیں تو ان کے لحاظ سے مصرعہ بالا "منہیوں"
کی نئی مساواتیں حاصل کرنے کے لیے ان تینوں صورتوں میں یکساں تعویض کی ضرورت
ہوگی۔

پس واضح ہے کہ محدودوں کے محوروں کی خواہ کچھ ہی وضع ہو قطع زائد اور مزدوج
قطع زائد کی مساواتیں متقاربوں کی مساوات سے صرف ان کے مستقلوں کے لحاظ ہی سے
مختلف ہوں گی اور ان زائد قطعوں کے یہ مستقل باہم دیگر مساوی اور مختلف العلامت
ہوں گے۔

(ل) جب قطع زائد کے متقاربوں کے مابین کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے تو اس کو
قائم قطع زائد کہتے ہیں۔

چونکہ متقاربوں کا درمیانی زاویہ ۲ مس $\frac{ب}{ا}$ کے مساوی ہوتا ہے اس لیے
اس کی قیمت ایک زاویہ قائمہ ہونے کی صورت میں $ب = ا$ ہو جاتا ہے۔ اس لحاظ سے
ایسے منحنی کو بعض اوقات متساوی الاضلاع قطع زائد بھی کہتے ہیں۔

واضح ہے کہ ایسے قائم قطع زائد کی مساوات لا۔ ما۔ = ز۔ ہے۔

چونکہ اس سے پیشتر کی ایک فصل میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ متقاربوں کو جب محور مانتے ہیں تو قطع زائد کی مساوات $۴ لا ما = لا + ب$ اور اس کے مزدوج قطع زائد کی مساوات $۴ لا ما - = (لا + ب)$ ہوتی ہے۔ لہذا قائم قطع زائد اور اس کے مزدوج کی مساواتیں متقاربوں کو محور ماننے پر علی الترتیب $۲ لا ما = لا$ اور $۲ لا ما = -$ ہو جاتی ہیں۔

[طالب علم کو چاہیے کہ بطور مشق قائم قطع زائد کی مساوات لا۔ ما۔ = ز۔ سے آغاز کر کے متقاربوں کو محدود مانے اور ان جدید محدودوں کی رقموں میں منحنی کی مساوات حاصل کرے۔]

واضح ہو کہ ایسے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں لا۔ ما۔ = ۰ اور لا + ما = ۰ ہیں اور یہ خطوط باہدیکر علی القوائم ہیں۔ پس حوالہ کے محوروں کو $\frac{\pi}{۴}$ زاویہ میں

گھمانے سے مطلوبہ مساوات حاصل ہو جاتی ہے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں $لا + ما = \frac{لا + ب}{۲}$ اور $ما = \frac{لا + ب}{۲}$ پس مساوات لا۔ ما۔ = ز۔ میں لا اور ما کی یہ قیمتیں تعویض کرنے سے $\frac{(لا + ب)}{۲} - \frac{(لا + ب)}{۲} = ز$ حاصل ہوتی ہے جو صاف کرنے پر

مساوات $۲ لا ما = لا$ میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

(م) قطع ناقص یا قطع زائد کی مساوات اس کو مبدا مان کر یوں حاصل کی جاسکتی ہے کہ مرکز مبدا والی مساوات میں لا کے عوض لا۔ لکھا جائے یعنی

$$(۱) \dots\dots\dots ۱ = \frac{لا}{ب} \pm \frac{(لا - ۱)}{۲}$$

اب اگر فرض کیا جائے کہ اس سے اس کے قریب تر ماسک کا فاصلہ مستقل (بالفرض د) لکھا جاتا ہے اور خروج المرکز کی قیمت اکائی ہو جاتی ہے تو منحنی کی صورت قطع مکانی میں تبدیل ہو جاتی ہے جس کا وتر خاص م د ہے۔

چونکہ $د = ۱ - لا$ اور $لا = ۱ - (۱ - لا)$ لہذا ز کی قیمت جب اکائی ہوتی ہے تو لا متناہی ہو جاتا ہے۔

$$\text{مبدا } (۱ - لا) = د = (۱ + لا) \therefore د = \frac{ب}{۲}$$

$$\text{لیں مساوات (۱) کی رُو سے } \frac{۱۱}{۲} \pm \frac{۱۱}{۲} = ۱۱ \pm ۱۱ = ۰$$

$$\text{چونکہ } ۱ = \infty \text{ پس } ۱ = \pm \infty$$

اس لیے قطع مکانی قطع ناقص یا زائد کی رانتہائی صورت ہے۔ اس کا وتر خاص محدود ہے لیکن محور اعظم و محور اقل نامتناہی ہیں۔ اس کا مرکز اور نیز دوسرا مسکہ بھی لاتناہی پر واقع ہیں۔

طالب علم کے لیے مفید ہوگا کہ بطور مشتق قطع مکانی کے خواص قطع ناقص یا قطع زائد کے خواص سے مستنبط کرے۔

دسویں باب کی مثالیں

(۱) - مندرجہ ذیل زائدوں کے متقاربوں اور ان کے مزدوج زائدوں کی مساواتیں دریافت کرو اور ان کی ترسیم کرو:—

$$(۱) \quad ۱۱ - ۱۱ = ۰ \quad (ب) \quad ۱۱ - ۱۱ = ۰$$

(۲) اگر زائد دو مزدوج زائدوں کے خروج المركز ہوں تو $\frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱} = ۱$

(۳) کسی قطع زائد کے متقارب سے اس کے ماسکوں کا فاصلہ عدداً ب کے

مساوی ہے۔

(۴) مرکز سے ایک ایسے خط کا فاصلہ جو قطع زائد کے ایک ماسک سے ایک متقارب

پر علی القوائم کھینچا جائے، عدداً ب کے مساوی ہے۔

(۵) متقاربوں سے قطع زائد کے کسی نقطہ کے فاصلوں کا حاصل ضرب مستقل ہے۔

(۶) ثابت کرو کہ قائم قطع زائد کا خروج المركز ۱۱ ہے۔

$$(۷) \quad \frac{۱۱}{۲} + \frac{۱۱}{۲} = ۱۱ \quad \text{پر کے کسی نقطہ کا قطبی لمبانا } \frac{۱۱}{۲} - \frac{۱۱}{۲} = ۰$$

$$\text{ناقص } \frac{۱۱}{۲} + \frac{۱۱}{۲} = ۱۱ \quad \text{ا کو مس کرتا ہے۔}$$

$$(۸) \quad \text{اگر نقطہ (ع، ب) کا قطبی لمبانا منہی } ۱۱ - ۱۱ = ۰ \quad \text{منہی } ۱۱ + ۱۱ = ۰$$

کو مس کرتا ہے تو نقطہ (ع) ب) قائم قطع زائد لا^۲ - ما^۲ - ۴ = ۰ پر واقع ہے۔
 (۹) قطع زائد کے کسی خط تماس کا وہ جزو جو اس کے متقاربوں کا مسقط ہے
 نقطہ تماس پر تنصیف پاتا ہے۔
 (۱۰) قطع زائد کا کوئی ساخط تماس متقاربوں سے مستقل رقبہ کا مثلث قطع
 کرتا ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ ما - صلا = اور ما + صلا = ہر کی تمام قیمتوں کے
 لیے لا^۲ = ج^۲ کے مزدوج قطر ہیں۔

(۱۲) خط مستقیم لا = قطع زائد لا^۲ + لا^۲ ۳ + لا^۲ ۴ = ۹ کا ایک متقارب
 ہے۔ دوسرے متقارب کی مساوات کیا ہے؟

(۱۳) اگر ہم مرکز دائروں کے کسی نظام پر کسی دیے ہوئے خط مستقیم کے متوازی
 خطوط تماس کھینچ جائیں تو ان کے نقاط تماس ایک قائم قطع زائد پر واقع ہیں۔
 (۱۴) کسی قائم قطع زائد کے مرکز سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس کے قطبی سے مرکز
 کے عمودی فاصلہ کا بالعکس متناسب ہے۔

(۱۵) ایک قطع زائد کے متقاربوں کے متوازی خطوط کھینچ کر ایک متوازی الاضلاع
 تیار کیا جاتا ہے اور اس کا ایک وتر قطع زائد کا وتر ہے۔ ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع
 کے دوسرے وتر کی سمت قطع زائد کے مرکز میں سے گزرتی ہے۔

(۱۶) قائم قطع زائد کے کسی نقطہ سے اس کے کسی قطر کے سروں تک کھینچے ہوئے
 خطوط مستقیم متقاربوں کے ساتھ مساوی زاویے بناتے ہیں۔

گیارہواں باب

ماسکرا کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات

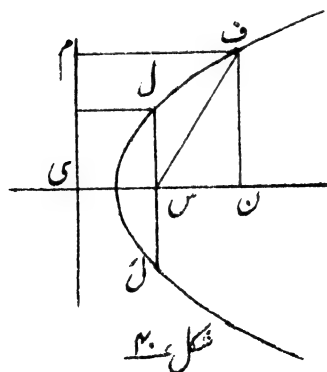
۶۴ (۱)۔ ماسکہ کو قطب مان کر مخروطی کی مساوات کی تعیین۔

فرض کرو کہ س مجڑوٹی کا ماسکہ ہے می م اس کا مرتب اور اس کا خروج المکرر
خط س می مرتب پر علی القوانم کھینچو اور س می کو ابتدائی خط تصور کرو (ملاحظہ ہو شکل نمبر ۴)
ل س ل کو وتر خاص فرض کرو تو ز (س می) = س ل اس کو لہ فترار دو۔
مغنی پر کے کسی نقطہ ف کے محددوں کو سہا اور طہ مانو۔ ف م اور ف ن بالترتیب
مرتب اور خط س می پر عمود کھینچو۔

تب س ف = ز × ف م = ز × ن ی = ز × ن س + ز × س ی

یعنی من = - زمر جسم ط + لہ

$$\therefore \frac{1}{2} = 1 + \text{زحم طه}$$



اگر مخروطی کا محور ابتدائی خط کے ساتھ زاویہ ϵ بناتا ہے تو مخروطی کی مساوات

$$\frac{r}{\sin \theta} = 1 + \text{زجم} (\text{ط} - \epsilon) \text{ ہوگی۔}$$

کیونکہ اس صورت میں خط $\sin \theta$ کے ساتھ زاویہ $\text{ط} - \epsilon$ بناتا ہے۔
(ب) اگر ط مرتب پر کسی نقطہ کے محدود ہوں تو $\text{زجم} \text{ط} = \text{سی} = \frac{r}{\sin \theta}$
∴ مرتب کی مساوات $\frac{r}{\sin \theta} = \text{زجم} \text{ط}$ ہے۔

[مخروطی کی مساوات اگر $\frac{r}{\sin \theta} = 1 + \text{زجم} (\text{ط} - \epsilon)$ ہو تو اس کے مرتب کی مساوات $\frac{r}{\sin \theta} = \text{زجم} (\text{ط} - \epsilon)$ ہوگی]

اگر سی ف ماسکی وتر ہے اور ف کا زاویہ سمتی ط ہے تو ف کا زاویہ سمتی $\text{ط} + \pi$ ہوگا۔

پس اگر سی $\text{ف} = \text{سما}$ اور سی $\text{ف} = \text{سما}$ تو

$$\frac{r}{\sin \theta} = 1 + \text{زجم} \text{ط اور } \frac{r}{\sin \theta} = 1 + \text{زجم} (\text{ط} + \pi)$$

$$\therefore \frac{r}{\sin \theta} + \frac{r}{\sin \theta} = 2 \quad \text{یعنی} \quad \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{r}$$

اس لیے کسی بھی مخروطی میں نصف وتر خاص کسی بھی ماسکی

وتر کے قطعات کا موسیقی اوسط ہے۔

(ج) مخروطی $\frac{r}{\sin \theta} = 1 + \text{زجم} \text{ط}$ کی ترسیم اس کی مساوات کے ذریعہ

(۱) فرض کرو $z = 1 + \text{زجم} \text{ط}$ = اتب منحنی قطع مکانی ہے اور مساوات $\frac{r}{\sin \theta} = 1 + \text{زجم} z$

ہو جاتی ہے۔ نقطہ ۱ پر جہاں کہ منحنی محور کو قطع کرتا ہے $\text{ط} = 0$ اور $\text{سما} = \text{پالہ}$

جیسے جیسے زاویہ ط بڑھتا ہے ویسے ہی $(1 + \text{زجم} \text{ط})$ گھٹتا ہے اور اس لیے سما بڑھتا

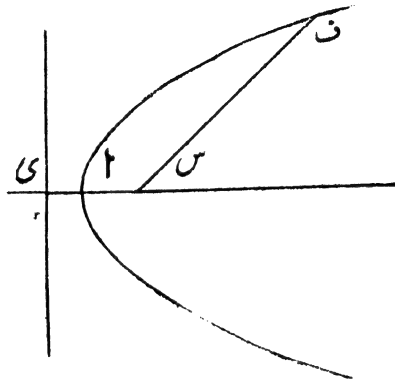
ہے۔ اس طرح سما بغیر کسی حد کے بڑھتا جاتا ہے حتیٰ کہ ط جب π کے مساوی

ہوتا ہے تو سما کی قیمت نامتناہی بڑی ہوتی ہے ط کی قیمت جب π سے تجاوز

موکر بڑھتی جاتی ہے تو $1 + \text{زجم} \text{ط}$ مسلسل بڑھتا جاتا ہے اور اس لیے سما بھی مسلسل

گھٹتا جاتا ہے یہاں تک کہ جب $\text{ط} = \pi$ تو سما کی قیمت پالہ کے مساوی

ہو جاتی ہے۔ پس جیسا کہ شکل ۱۱۷ سے ظاہر ہے یہ منحنی سمت ۱ س میں لاتناہی



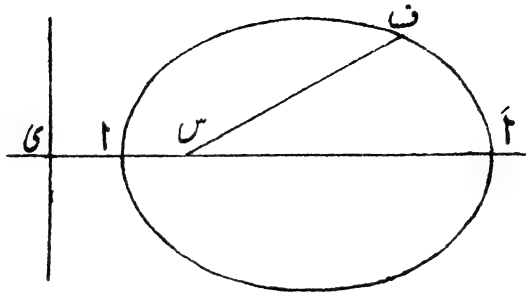
شکل ۱۱۷

تک چلا جاتا ہے۔

(۲) فرض کرو $z > 1$ تب منحنی قطع ناقص ہے۔

نقطہ ۲ پر طہ = ۰ اور مسا = $\frac{1}{(1+z)}$ گھٹتا ہے یعنی سر بڑھتا جیسے جیسے طہ بڑھتا ہے جم طہ گھٹتا ہے اور اس لیے $\frac{1}{1+z}$ گھٹتا ہے۔
 ہے حتیٰ کہ طہ = π جبکہ مسا = $\frac{1}{1+z}$ چونکہ $z > 1$ لہذا مسا کی یہ قیمت مثبت ہے۔ پس منحنی محور کو دوبارہ کسی نقطہ ۱ پر قطع کرتا ہے ایسا کہ $\frac{1}{1+z} = 1 - \frac{1}{z}$
 طہ کی قیمت π سے بڑھ کر جیسے جیسے $\pi/2$ کے قریب پہنچتی ہے جم طہ مسلسل ۱ سے ۱ تک بڑھتا ہے۔ اس لیے $\frac{1}{1+z}$ مسلسل بڑھتا ہے اور
 مسا مسلسل $\frac{1}{1+z}$ سے گھٹ کر $\frac{1}{1+z}$ ہو جاتا ہے۔

چونکہ طہ کی کسی قیمت کے لیے بھی جم طہ = جم ($\pi/2$ - طہ) یہ منحنی بلحاظ اپنے محور کے متشاکل ہے۔ پس جب ز کی قیمت اکائی سے کم ہوتی ہے تو مصرعہ بالا مساوات ایک بند منحنی کو تعبیر کرتی ہے جو ابتدائی خط کے لحاظ سے متشاکل ہے۔



شکل ۴۲

(۳) فرض کرو $z < 1$ تب منحنی قطع زائد ہے۔

نقطہ 'ا' پر ط = ۰ اور $s = \frac{1}{1+z}$ ۔

جیسے ط بڑھتا ہے حجم ط گھٹتا ہے اور اس لیے س بڑھتا ہے یہاں تک کہ $1+z$ حجم ط = ۰ ط کی جب یہ قیمت ہوتی ہے تو ہم اس زاویہ کو π کہیں گے (شکل ۴۲ میں یہ زاویہ 'ا' س ک ہے) اور اس صورت میں س کی قیمت ناغناہی بڑی ہو جاتی ہے۔

جب زاویہ ط کی قیمت π سے متجاوز ہو کر بڑھتی جاتی ہے تو $(1+z)$ منفی ہوتا ہے اور جب ط = π تو $s = -\frac{1}{1+z}$ ۔

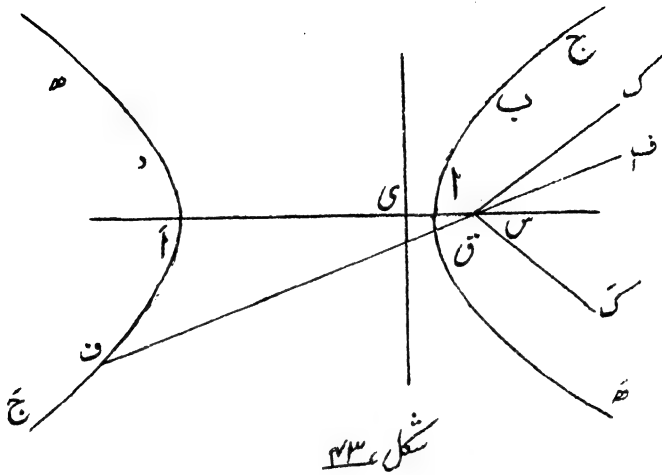
($1+z$ حجم ط) منفی رہیگا تا وقتیکہ ط = $\pi/2$ ۔ π یعنی زاویہ 'ا' س ک۔

جب زاویہ ط = $\pi/2$ (یعنی $\pi/2$ سے) تو س پھر ناغناہی بڑا ہوتا ہے۔ اگر ط اس سے ذرا سا چھوٹا ہوتا ہے تو س بہت بڑا اور منفی ہوتا ہے اور اگر ط ذرا سا بڑا ہوتا ہے تو س بہت بڑا اور مثبت ہوتا ہے۔ س کی قیمتیں مثبت رہیں گی جبکہ زاویہ ط کی قیمت $(\pi/2 - \pi)$ سے بدل کر $\pi/2$ ہوتی ہے۔

پس منحنی مندرجہ ذیل ترتیب سے کھینچی جاتی ہے:- (دیکھو شکل ۴۲)

پہلے اس کا حصہ 'ا' ب ج کھینچا جاتا ہے۔ اس کے بعد آ ج ف ا پھر آ دھ اور ب سے آخر ق ا۔

یہ منحنی دو شاخوں یعنی ج ب ا ق و آ ج ف ا دھ پر مشتمل ہے۔ ان میں سے آخر الذکر سالم شاخ کے لیے نیم قطر سمتی منفی ہے۔



اگر شکل ۲۲ کی طرح، ایک خط $س ق ف$ منحنی کو دو نقطوں $ق$ اور $ف$ میں قطع کرتا ہوا کھینچا جائے، جو منحنی کی مختلف شاخوں پر واقع ہیں تو ان نقطوں $ق$ اور $ف$ کی نسبت یہ نہ خیال کرنا چاہیے کہ وہ ایک ہی زاویہ سمتی رکھتے ہیں نیم قطر سمتی $س ف$ منحنی ہے یعنی خط $س ف$ اس سمت کے مخالف سمت میں کھینچا گیا ہے جس سے اس کے زاویہ سمتی کی حد بندی ہوتی ہے پس اگر $ف س$ کو $ف س$ تک بڑھایا جائے تو زیر بحث زاویہ سمتی $ا س ف$ ہونا چاہیے۔ اس لیے اگر نقطہ $ق$ کا زاویہ سمتی $ط$ ہو تو نقطہ $ف$ کا زاویہ سمتی $ط - \pi$ ہوگا۔

(د) کسی مخروطی پر کے کوئی سے دو نقطوں میں سے گزرنے والے خط مستقیم کی مساوات کی تعیین اور اس کے ذریعہ مخروطی پر کے کسی نقطہ کے خط $ا س$ کی مساوات فرض کرو کہ $ف$ اور $ق$ نقطوں کے سمتی زاویے بالترتیب $(ع - ب)$ اور $(ا + ب)$ ہیں اور مخروطی کی مساوات لے کر $ا + ب$ زخم $ط$ (۱) ہے۔

خط مستقیم جس کی مساوات لے کر $ا + ب$ زخم $ط$ (۲) ہے کوئی سے دو نقطوں میں سے لے کر لیا اس لیے کہ اس کی مساوات میں دو باہدگیر غیر تابع مستقل $ا$ اور $ب$ شریک ہیں۔ اور ہم نے باب (۶) میں دیکھا ہے کہ خط مستقیم کی سادہ ترین قطعی مساوات $سماجم (ط - ع) = ع$ ہے جس میں $ع$ مبداء سے خط پر کھینچا ہوا عمود ہے۔

یہ خط مستقیم دیے ہوئے دو نقطوں ف اور ق میں سے گزرے گا اگر س
کی قیمتیں مساوات (۲) میں وہی ہیں جو مساوات (۱) میں ہیں جب $ط = ع - ب$ ۔
اور جب $ط = ع + ب$ ۔
واضح ہے کہ یہ صورت اس وقت واقع ہوگی جبکہ

$$\begin{aligned} ۱ + زجم (ع - ب) &= ۱ جم (ع - ب) + ب جم ب \\ ۱ + زجم (ع + ب) &= ۱ جم (ع + ب) + ب جم ب \\ ۱ &= ز اور ب جم ب = ۱ \end{aligned}$$

پس ۱ اور ب کی ان قیمتوں کو مساوات (۲) میں تعویض کرنے سے
ف اور ق کو ملانے والے خط یعنی مخروطی کے وتر کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + قطب جم (ط - ع) \dots\dots\dots (۳) \text{ برآمد ہوتی ہے۔}$$

لہذا مخروطی پر کے ع زاویہ سمتی والے نقطہ کے خط عماس کی مساوات دریا
کرنے کے لیے مساوات (۳) میں $ب = ۰$ لکھنا چاہیے۔

$$\text{پس اس کی مساوات } \frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع) \dots\dots\dots (۴) \text{ ہے۔}$$

نتیجہ صریح۔ اگر مخروطی کی مساوات $\frac{ل}{س} = ۱ + زجم (ط - ج)$
مانی جائے تو $(ع - ب)$ اور $(ع + ب)$ نقطوں کو ملانے والے وتر کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم (ط - ج) + قطب جم (ط - ع) \text{ ہے}$$

اور ع زاویہ سمتی والے نقطہ پر کے خط عماس کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم (ط - ج) + جم (ط - ع) \text{ ہے۔}$$

(د) مخروطی کے کسی نقطہ پر کے عماد کی قطبی مساوات جبکہ
ماسکہ قطب ہو۔

$$\text{مخروطی کی مساوات } \frac{ل}{س} = ۱ + زجم ط \text{ مانو۔ اس کے زاویہ سمتی ع والے}$$

نقطہ پر کے خط مماس کی مساوات $\frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع)$ ہے
اس خط مماس کے کسی علی التواء خط کی مساوات

$$\frac{ج}{س} = زجم (ط + \frac{\pi}{4}) + جم (ط + \frac{\pi}{4} - ع)$$

یعنی $\frac{ج}{س} = زجم ط - جب (ط - ع)$ ہے
یہ مساوات عماد کی مطلوبہ مساوات ہوگی بشرطیکہ ج اس طرح منتخب ہو کہ نقطہ جس کے

قطبی محدود $\frac{ل}{س + زجم ع}$ ہے اس خط پر واقع ہوں۔

$$پس چاہیے کہ ج $\frac{ل}{س} + زجم ع = زجم ع$$$

$$یعنی ج = \frac{ل - زجم ع}{س + زجم ع}$$

عماد کی مطلوبہ مساوات

$$\frac{ل - زجم ع}{س + زجم ع} = زجم ط + جب (ط - ع) \text{ ہے}$$

(و) کسی نقطہ کے بلحاظ ایک مخروطی کے قطبی کی قطبی مساوات

مخروطی کی مساوات $\frac{ل}{س} = ۱ + زجم ط \dots \dots \dots (۱)$ مانو
فرض کرو کہ دیے ہوئے نقطہ کے محدود سر 'ط' ہیں اور مخروطی کے
جن نقطوں پر کے مماس دیے ہوئے نقطہ میں سے گزرتے ہیں ان کے سمتی زاویے
ع ± ہ ہیں۔ ان نقطوں میں سے گزرنے والے خط کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + قطبہ جم (ط - ع) \dots \dots \dots (۲) \text{ ہوگی}$$

خطوط مماس کی مساواتیں

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع + ہ)$$

$$\frac{ل}{س} = زجم ط + جم (ط - ع - ہ) \text{ اور ہوگی}$$

چونکہ یہ نقطے (سہ) ط میں سے گزرتے ہیں،

$$\text{اس لیے } \frac{ل}{س} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع + ب)}$$

$$\text{اور } \frac{ل}{س} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع - ب)}$$

$$\text{پس } ط = ع + \text{اور جم ب} = \frac{ل}{س} - \text{زجم ط}$$

ع اور ب کی یہ قیمتیں مساوات (۲) میں تویض کرنے سے

$$\left(\frac{ل}{س} - \text{زجم ط} \right) \left(\frac{ل}{س} - \text{زجم ط} \right) = \text{جم (ط - ط)} \dots \dots (۳)$$

جو مطلوبہ قطبی مساوات ہے۔

مثال (۱)۔ اگر مخروطی کے کسی نقطہ پر کا خط ماس مرتب سے نقطہ ک پر ملے تو زاویہ ک س ف قائمہ ہے، جس میں س مخروطی کا ماسک ہے اگر نقطہ ف کا سمتی زاویہ ع فرض کیا جائے تو ف پر کے خط ماس کی مساوات

$$\frac{ل}{س} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع)} \text{ ہوگی}$$

یہ خط مرتب سے جس کی مساوات ل = زجم ط ہے ایک ایسے نقطہ پر ملتا ہے

$$\text{جہاں جم (ط - ع) = ۰۔ پس واضح ہے کہ نقطہ ک پر ط - ع = } \frac{\pi}{4} \text{ اس لیے زاویہ ک س ف قائمہ ہے۔}$$

مثال (۲)۔ مخروطی کے متقابلوں کی قطبی مساوات کی تعیین۔

مخروطی کی مساوات $\frac{ل}{س} = ۱ + \text{زجم ط}$ فرض کرو۔ مخروطی پر کے ایسے نقطہ کے خط ماس کی مساوات جس کا سمتی زاویہ ع ہے،

$$\frac{ل}{س} = \text{زجم ط} + \text{جم (ط - ع)} \dots \dots (۱) \text{ ہے}$$

$$\text{اگر } س = \infty \text{ تو } ۰ = ۱ + \text{زجم ع} \dots \dots (۲) \text{ اور ایسی}$$

صورت میں نقطہ مذکور مخروطی پر لائتا ہی پر کا نقطہ ہوگا۔

پس ع کو (۱) اور (۲) مساواتوں میں سے ساقط کرنے سے مساوات

{ ز $\frac{ل}{س}$ + (۱ - ز) جم ط } = ز^۲ جب^۲ ط جب^۲ ل = (ز^۲ - ۱) جب^۲ ط
حاصل ہوتی ہے جو مخروطی کے متقارب کی قطبی مساوات ہے۔

گیارہویں باب کی مثالیں

(۱) مکانی پر کے کسی دو خطوط ماس کا خارجی زاویہ ان کے نقاط تماس کے سمتی زاویوں کے تفاوت کا نصف ہے۔

(۲) کسی دیے ہوئے مکانی کے ایسے دو خطوط ماس کے نقطہ تقاطع کا طریق جو باہدگیر ایک مستقل زاویہ پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں ایک قطع زائد ہے جس کا ماسک اور مرتب دیے ہوئے مکانی کا ماسک اور مرتب ہے۔

(۳) اگر ف س ف اور ق س ق مخروطی کے کوئی سے دو ماسکی وتر باہدگیر علی التوائم ہوں تو ثابت کرو کہ $\frac{ق س}{ق س} \times \frac{ق س}{ق س} + \frac{ق س}{ق س} \times \frac{ق س}{ق س}$ مستقل ہے۔

(۴) مخروطی کی قطبی مساوات کے ذریعہ سے ثابت کرو کہ ایسے نقطہ کا طریق جس کے حاصلوں کا حاصل جمع دو ثابت نقطوں سے مستقل ہے قطع ناقص ہے۔

(۵) اگر دو مخروطیوں کا ماسک مشترک ہے تو بتاؤ کہ ان کے دو مشترک وتر ان کے مرتبوں کے نقطہ تقاطع میں سے گزرینگے۔

(۶) مخروطی $\frac{ل}{س} = ۱ + ز$ جم ط کے دو باہدگیر علی التوائم خطوط ماس کے نقطہ تقاطع کا طریق منحنی $س^۲ - (۱ - ز) ل - ۲ ز س$ جم ط + $ز^۲ ل = ۰$ ہے۔

(۷) ایک معین قطر کا دائرہ جو ایک دیے ہوئے مخروطی کے ماسک س میں سے گزرتا ہے مخروطی کو 'ا' ب' ج' د' میں قطع کرتا ہے۔ بتاؤ کہ

س ۱ × س ب × س ج × س د مستقل ہے۔

(۸) ف و ف اگر س ماسک والے مخروطی کے کسی ثابت نقطہ و میں سے گزرنے والا وتر ہو تو مس $\frac{۱}{۲}$ ف س و مس $\frac{۱}{۲}$ ف س و مستقل ہوگا۔

(۹) مخروطی لہے $= ۱ +$ زجم طہ پر کے تین نقطوں کے سمتی زاویے
 نہ، نہ، نہ ہیں۔ ان نقطوں پر کے عماد نقطہ سر، طہ، پر ملتے ہیں تو ثابت کرو کہ
 $۲ طہ = عہ + بہ + جہ$

بارہواں باب

درجہ دوم کی عام مساوات

۶۵ (۱) - درجہ دوم کی عام مساوات پر بحث کرنے سے پہلے ہم یہ بتانا چاہتے ہیں کہ محوروں کی تبدیلی سے کسی مساوات کے درجہ میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی ہے۔

صفحات ۱۳۸ و ۱۳۹ کے مطالعہ سے ظاہر ہے کہ محدودوں کے مبادی کی تبدیلی اور محوروں کے گھماؤ کا اثر صرف اسی قدر ہوتا ہے کہ نئی مساوات میں بجائے محدود لا اور ما کے مصرعہ ذیل کی نوعیت کے جملے استعمال کیے جاتے ہیں:

$$ل + م + ن \text{ اور } ل + م + ن$$

یہ جملے پہلے ہی درجے کے ہیں اس لیے اگر وہ کسی مساوات میں بجائے لا اور ما کے لکھے جائیں تو واضح ہے کہ مساوات کا درجہ بلند نہ ہوگا۔ یہ درجہ کم نہ ہوگا۔ اس لیے نہیں ہوگا کہ اگر بالفرض وہ کمتر ہوتا تو اسی استدلال سے مستنبط ہوتا ہے کہ ابتدائی محوروں پر عود کر آنے سے اور اس لیے ابتدائی مساوات پر واپس جانے سے مساوات کا درجہ بلند نہ ہو جاتا ہے لیکن ایسا نہیں ہوتا ہے۔ پس محوروں کی تبدیلی سے مساوات کے درجہ میں کسی قسم کی تبدیلی نہیں ہونے پاتی۔

(ب) ہر ایسا منحنی جس کی مساوات دو سرے درجہ کی

ہو تراش محض و ط ہے۔

ہم فرض کر سکتے ہیں کہ منحنی کے محدودوں کے محور باہد گیر علی القوائم ہیں۔

اس لیے کہ اگر مساوات مائل محوروں سے متعلق ہو تو بھی ہم اس کو علی القوائم محوروں کی رقوم میں بدل سکتے ہیں اور اس تبدیلی سے مساوات کا درجہ غیر متغیر رہتا ہے۔ جیسا کہ ابھی ثابت کیا گیا۔

ہم منحنی کی مساوات $۱\lambda^2 + ۲ح\lambda + ما + ب\lambda^2 + ۲گ\lambda + ۲ف\lambda + ج = ۰$ (۱) فرض کرتے ہیں جو دوسرے درجہ کی مساوات کی عام ترین شکل ہے۔

اگر محوروں کو ایک معین زاویہ میں گھما دیں تو مساوات میں سے $لاما$ والی رقوم خارج ہو سکتی ہے۔ اس لیے کہ محوروں کو زاویہ θ میں گھمانے کے لیے بجائے λ اور μ کے علی الترتیب $\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta$ اور $\mu \cos \theta - \lambda \sin \theta$ کا حجم θ + μ کا حجم θ لکھنا پڑتا ہے (ملاحظہ ہو صفحہ ۱۳۹)۔

اس تعویض سے مساوات (۱) بصورت

$۱(لا \cos \theta - \mu \sin \theta)^2 + ۲ح(لا \cos \theta - \mu \sin \theta)(\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + (لا \cos \theta + \mu \sin \theta)^2 + ۲گ(لا \cos \theta - \mu \sin \theta)(\lambda \cos \theta + \mu \sin \theta) + ۲ف(لا \cos \theta + \mu \sin \theta)^2 + ج = ۰$ (۲) تبدیل ہو جاتی ہے جس میں $لاما$ کا سر $۲(ب - ۱)$ جب θ حجم θ + $۲ح$ (جم θ - جب θ) ہے

اور وہ صفر ہو جاتا ہے جبکہ $\cos \theta = \frac{۲ح}{۱-ب}$ (۳)

چونکہ ایسا زاویہ جس کا \cos کوئی سی حقیقی مقدار ہو دریافت ہو سکتا ہے

لہذا زاویہ $\theta = \cos^{-1} \frac{۲ح}{۱-ب}$ تمام صورتوں میں حقیقی ہے۔

پس مساوات (۲) کو بشکل

$۱\lambda^2 + ب\lambda^2 + ۲گ\lambda + ۲ف\lambda + ج = ۰$ (۴) لکھ سکتے ہیں۔

اگر تو λ صفر ہے یا نہ $ب$ تو مساوات (۴) کو مندرجہ ذیل شکل میں ڈھال سکتے ہیں :-

$$۱(لا + \frac{گ}{ب})^2 + ب(لا + \frac{گ}{ب})^2 = \frac{گ^2}{ب} + \frac{ف^2}{ب} - ج = ک$$

اگر نقطہ (- گ - ' - ف) پر مبداء منتقل کیا جائے تو مساوات

۱ لا + ب ۱ = ک (۵) ہو جاتی ہے۔
اگر بائیں جانب کی رقم (یعنی ک) = تو مساوات دو خطوط مستقیم کو
تعبیر کریگی (صفحہ ۱۳۱) لیکن اگر ک صفر نہ ہو تو مساوات

$$\frac{لا}{ک} + \frac{ب}{ک} = ۱ \text{ ہو جاتی ہے}$$

جو قطع ناقص کو تعبیر کرتی ہے اگر دونوں نسب نامہ مثبت ہوں اور قطع زاہل کو
اگر ایک نسب نامہ مثبت ہو اور دوسرا منفی۔

اگر دونوں نسب نامہ منفی ہوں تو واضح ہے کہ لا اور ما کی کوئی حقیقی قیمتیں
مندرجہ بالا مساوات کے لئے صادق نہیں آسکتیں۔ اس صورت میں منفی ایک
خیالی ناقص کی تعبیر کریگا۔

اگر ۱ اور ب مساوی ہوں تو ب = ۱ لکھنے سے مساوات لا + ۱ = ک
جو ایک دائرہ کی مساوات ہے۔

اس کے بعد مساوات (۴) میں ۱ یا ب کو صفر مانو۔ ۱۵ (۱) کی ٹو
۱۶ اور ب دونوں وقت واحد میں صفر نہیں ہو سکتے۔ فرض کرو کہ ۱ صفر ہے۔
تب مساوات مذکور بشکل

$$ب (۱ + \frac{ف}{ب}) = ۲ - گ - لا - ج + \frac{ف}{ب} \dots (۶)$$

لکھی جاسکتی ہے۔ اب اگر گ = تو مساوات دو متوازی خطوط کو تعبیر
کرتی ہے جو اگر گ کے ساتھ ف - ب ج = بھی ہو تو باہم دیگر منطبق
ہوتے ہیں۔ اگر گ صفر نہ ہو تو مساوات شکل ذیل لکھی جاسکتی ہے:-

$$(۱ + \frac{ف}{ب}) = ۲ - \frac{گ}{ب} - (لا - ۲ ب - \frac{ف}{ب} + \frac{ج}{ب})$$

جو ایک قطعہ مکافہ کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور لا کے محور کے متوازی ہے۔
پس ہر صورت میں دوسرے درجہ کی مساوات کا منحنی
تراشِ مخروط ہے۔

(ج) تراشِ مخروط کے مرکز کے محلّہ دین کی دریافت، درجہ دوم
کی عام مساوات کو مان کر نویں باب کے شروع میں ہم نے دیکھا ہے کہ جب متحدین کا
مبدأ تراشِ مخروط کا مرکز ہوتا ہے تو اس کی مساوات میں لا اور ما کی پہلی قوت کی
رقمیں نہیں پائی جاتی ہیں۔

پس عام مساوات کے ذریعہ تراشِ مخروط کا مرکز معلوم کرنے کے لیے مبدأ کو کسی
ایسے نقطہ (لا، ما) میں تبدیل کرنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے لا اور ما کے سر صفر
ہو جاتے ہیں۔

پس مساوات $لا + لا^۲ + ح لا + ما + ما^۲ + گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ کو
نقطہ لا، ما میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے ذریعہ ظاہر کرنے کے لیے
لا کے عوض لا + لا اور ما کے عوض ما + ما لکھنا پڑتا ہے جس کی وجہ سے مساوات
 $لا + لا + لا^۲ + ح لا + لا + لا + ما + ما + ما^۲ + گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$

یعنی $لا + لا + ح لا + لا + لا + لا + ما + ما + ما^۲ + گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$
اور اس میں لا اور ما دونوں کے سر صفر ہو جاتے ہیں بشرطیکہ لا اور ما کا نتیجہ
اس طرح ہو کہ $لا + لا + ح لا + ما + ما = ۰$ (۱)
اور $ح لا + ما + ما = ۰$ (۲)

پس مبدأ (لا، ما) کے حوالہ سے مساوات

$لا + لا + ح لا + ما + ما = ۰$ (۳)

ہوگی جس میں $ج = لا + لا + ح لا + ما + ما + گ لا + ۲ ف ما + ج = ۰$ (۴)

اس لیے تراشِ مخروط کے مرکز کے محلّہ لا اور ما کی وہ قیمتیں ہیں جو
(۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

∴ مرکز نقطہ $\left(\frac{ا ب - ح}{ا ب - ح}, \frac{ب گ - ا ج}{ا ب - ح} \right)$ ہے

جب $ا ب - ح = ۰$ تو مرکز کے محدود نامتناہی ہوتے ہیں یعنی مرکز لاتناہی پر واقع ہوتا ہے اور اس لیے منحنی قطع مکانی ہے۔ لیکن جب $ا ب - ح = ۰$ یعنی

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ا} = \frac{ا}{ب}$$

تو (۱) اور (۲) مساواتیں ایک ہی خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہیں اور اس خط کا کوئی نقطہ منحنی کا ایک مرکز ہے پس اس صورت میں مرکز کا طریق دو متوازی خطوط مستقیم ہے واضح ہو کہ مندرجہ بالا بحث میں محور خواہ علی التواءم ہو سکتے ہیں یا مائل۔
(د) درجہ دوم کی عام مساوات سے دو خطوط مستقیم کی تعبیر۔

تراش مخروط کے مرکز کے محدودوں کی مساواتوں (۱) اور (۲) کو علی الترتیب لا اور ما سے ضرب دو تو

$$ا^۲ + ح لا + ا ب گ لا = ۰$$

$$ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا = ۰$$

ان کو باہم یکجا کرنے سے

$$ا^۲ + ۲ ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا = ۰$$

اس کو مساوات (۳) یعنی $ا^۲ + ۲ ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا + ۲ ا ب ا + ۲ ا ف ا + ۲ ا ب ا = ۰$ میں سے وضع کرنے سے

$$ا^۲ + ۲ ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا + ۲ ا ب ا + ۲ ا ف ا + ۲ ا ب ا = ۰ \quad (۵)$$

اس مساوات میں لا اور ما کی قیمتیں درج کرنے سے

$$\begin{aligned} ا^۲ + ۲ ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا + ۲ ا ب ا + ۲ ا ف ا + ۲ ا ب ا &= ۰ \\ ا^۲ + ۲ ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا + ۲ ا ب ا + ۲ ا ف ا + ۲ ا ب ا &= ۰ \\ ا^۲ + ۲ ا ب لا + ا ب ا + ا ف ا + ۲ ا ب ا + ۲ ا ف ا + ۲ ا ب ا &= ۰ \end{aligned}$$

جملہ ۲ لب ج + ۲ ف گ ح - ۱ ف ن ا - ۲ ب گ ا - ج ح عموماً Δ سے تعبیر کیا جاتا ہے اور جملہ ۱ لا + ۲ ح لا + ۱ ب ما + ۲ گ لا + ۱ ن ما + ج کا معین کہلاتا ہے۔ جب معینر $\Delta = ۰$ تو ج $= ۰$ اور عام مساوات کا استعمال ۱ لا + ۲ ح لا + ۱ ب ما $= ۰$ میں ہوتا ہے جو دو خطوط مستقیم کی مساوات ہے۔ پس $\Delta = ۰$ تراش مخروط کے دو خطوط مستقیم میں تحول ہونے کی شرط ہے۔ صفحہ ۱۳۲ پر ہم نے یہی شرط ایک دوسرے طریقے سے دریافت کی تھی۔ اوپر جو کچھ کہ بیان کیا گیا ہے اہل محدثوں کے نیسے بھی صادق آتا ہے۔

(۷) تراش مخروط ۱ لا + ۲ ح لا + ۱ ب ما $= ۱$ کے محوروں کی وضع و مقدار کی تعیین۔

اگر کسی تراش مخروط کو کوئی ہم مرکز دائرہ قطع کرتا ہے تو نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے قطر اس تراش مخروط کے محوروں کے ساتھ مساوی زاویوں میں مائل ہونگے۔ اور باہد گیر منطبق ہونگے۔ اگر دائرہ کا نصف قطر تراش مخروط کے دو نصف محوروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہو۔

چونکہ تراش مخروط کی مساوات ۱ لا + ۲ ح لا + ۱ ب ما $= ۱$ مانی گئی ہے

اور ہم مرکز دائرہ کی مساوات ۱ لا + ۱ ما $= ۱$ یعنی $\frac{۱}{ص} + \frac{۱}{ص} = ۱$ ہے۔ پس مبداء اور تراش مخروط و دائرہ کے نقاط تقاطع میں سے گزرنے والے خطوط کی مساوات

$$۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ح لا} + ۱ \text{ ب ما} = \frac{۱}{ص} + \frac{۱}{ص} \text{ ہے}$$

یعنی (۱) $\left(\frac{۱}{ص}\right) ۱ \text{ لا} + ۲ \text{ ح لا} + (ب - \frac{۱}{ص}) ۱ \text{ ما} = ۰ \dots (۱)$

اور یہ خطوط باہد گیر منطبق ہونگے اگر (۱) $\left(\frac{۱}{ص}\right) (ب - \frac{۱}{ص}) = ۱ \text{ ح} \dots (۲)$

ایسی حالت میں یہ خطوط نہ صرف آپس میں منطبق ہونگے بلکہ تراش مخروط کے دو محوروں میں سے کسی ایک محور کے ساتھ بھی منطبق ہونگے۔

پس مساوات (۲) کو حل کرنے سے تراش محروط کے نصف محوروں کے طول (ص) کی تعیین ہو سکتی ہے۔ مساوات مذکور

$$\frac{1}{ص} - (ب + ۱) \frac{1}{ص} + ۱ب - ح = ۰ \dots\dots\dots (۳)$$

$$\frac{(ب + ۱) \pm \sqrt{(ب + ۱)^2 - ۴(۱ب - ح)}}{۲} = \frac{1}{ص}$$

$$= \frac{(ب + ۱) \pm \sqrt{(ب + ۱)^2 - ۴(۱ب - ح)}}{۲}$$

اب مساوات (۱) کو $(\frac{1}{ص} - ۱)$ سے ضرب دو تو

$$۰ = (\frac{1}{ص} - ۱) لا + ح (\frac{1}{ص} - ۱) + لا (ب - \frac{1}{ص}) = ۰$$

اگر $\frac{1}{ص}$ مساوات (۲) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل ہے تو

$$۰ = (\frac{1}{ص} - ۱) لا + ح (\frac{1}{ص} - ۱) + لا (ب - \frac{1}{ص}) = ۰$$

$$\therefore (\frac{1}{ص} - ۱) لا + ح = ۰ \dots\dots\dots (۴)$$

پس اگر مساوات (۴) میں مساوات (۳) کی دو اصلوں میں سے کوئی ایک اصل تعویض کی جائے تو اس کے متناظر جزر کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

(و) درجہ دوم کی عام مساوات سے قطع مکانی کے محور اور

وتر خاص کی تعیین۔

اگر مساوات $\frac{1}{ص} لا + ح + ۱ب + ما + ۲گ + لا + ۲ف + ما + ج = ۰$ ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے تو دوم درجہ کی رقبہ مل کر ایک کامل مربع بناتی ہیں۔
لاحظہ ہو صفحہ (۱۸۲) لہذا یہ مساوات

(۱) $(\text{عہ لا} + \text{بہ ما})^2 + ۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰ \dots\dots (۱)$
 کے معادل ہے۔ جس میں $\text{عہ}^2 = \text{لا}^2$ اور $\text{بہ}^2 = \text{ب}^2$

مساوات (۱) پر غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ خط $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} = ۰$ پر کے عمود کا مربع خط $۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج} = ۰$ پر کے عمود کے متناسب ہے

ممكن ہے کہ یہ خطوط باہم دیگر علی القوائم نہ ہوں۔ لیکن ہم مساوات (۱) کو شکل
 $(\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ})^2 = ۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما}) + \text{لہ}^2 - (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج})$

یعنی $(\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ})^2 = ۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج})$ لکھ سکتے ہیں اور خط مستقیم جس کی مساوات $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = ۰$ ہے مساوات

$۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج}) = ۰$ والے خط مستقیم کے
 علی القوائم واقع ہوتا ہے اگر $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = ۰$ ہے

$$\text{یعنی لہ} = \frac{(\text{عہ گ} + \text{بہ ف})}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2}$$

پس اب خطوط $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = ۰$

اور $۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج}) = ۰$ کو علی الترتیب
 لا اور ما کے محور مانو تو ہمیں $\text{سا}^2 = \text{پ لا}$ کے کمال کے مثال مساوات حاصل ہوتی ہے۔
 اور واضح ہے کہ یہ مساوات قطع مکانی کی ہے جس کے محدودوں کے محور، منحنی کا محور اور
 منحنی کے رأس پر کا خط ما س ہیں۔

وتر خاص پ کی تعیین کے لیے ہم خط $\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = ۰$ پر کے عمود

$$\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ} = ۰ \text{ کو ما تصور کرتے ہیں}$$

اور خط $۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج}) = ۰$ پر کے عمود

$$۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج}) = ۰ \text{ کو لا تصور کرتے ہیں۔}$$

$$\text{پس } \left(\frac{\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}}{\text{عہ}^2 + \text{بہ}^2} \right)^2 = \text{پ} \left\{ \frac{۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج})}{۲\text{لا}^2 + (\text{عہ لا} + \text{بہ ما} + \text{لہ}) + (۲\text{گ لا} + ۲\text{ف ما} + \text{ج})} \right\}$$

$$\frac{۲(۲ - ۲\text{ف}) + ۲(۲ - ۲\text{گ})}{(۲ + ۲\text{ب})} = ۲$$

اور اس لیے مساوات (۱) یعنی (۲ + ۲ب) + ۲(۲ - ۲گ) + ۲(۲ - ۲ف) = ۰
ایک قطع مکانی کو تعبیر کرتی ہے جس کا محور عملاً ۲ + ۲ب + ۲ف = ۰ ہے اور جس کا
وتر خاص

$$\frac{۲(۲ - ۲\text{ف}) + ۲(۲ - ۲\text{گ})}{(۲ + ۲\text{ب})} = ۲$$

$$\frac{۲(۲ - ۲\text{ف}) + ۲(۲ - ۲\text{گ})}{(۲ + ۲\text{ب})} = ۲$$

$$\frac{۲(۲ - ۲\text{ف}) + ۲(۲ - ۲\text{گ})}{(۲ + ۲\text{ب})} = ۲$$

ذیل میں ہم نمونہ چند سوالات کو حل کر کے بتاتے ہیں کہ درجہ دوم کی مساوات
سے تشریح مخروط کی نوعیت وضع وغیرہ کیونکر دریافت ہو سکتی ہے۔

$$\text{مثال (۱) } ۱۲ - ۱۲\text{ا} + ۸\text{ا} - ۶۸ + ۲۲\text{ب} - ۱۲ = ۰$$

منحنی کے مرکز کے محدوداً 'ا' دریافت کرنے کے لیے ذیل کے ضابطے استعمال
ہوتے ہیں:

$$۱۲ - ۱۲\text{ا} + ۸\text{ا} - ۶۸ + ۲۲\text{ب} - ۱۲ = ۰$$

$$\text{پس } ۱۲ - ۱۲\text{ا} - ۶۸ + ۲۲\text{ب} = ۰ \text{ اور } ۱۲ - ۱۲\text{ا} + ۸\text{ا} - ۶۸ = ۰$$

ان کو حل کرنے سے مرکز کے محدودوں کی قیمتیں ۱۲ = ۲ اور ۱۲ = ۰ حاصل ہوتی ہیں۔

مرکز میں سے گزرنے والے متوازی محوروں کے حوالہ سے منحنی کی مساوات

$$۱۲ - ۱۲\text{ا} + ۸\text{ا} - ۶۸ + ۲۲\text{ب} - ۱۲ = ۰ \text{ ہے جس میں ج} = ۲\text{گ} + ۲\text{ا} + ۲\text{ف}$$

$$\text{یعنی مساوات } ۱۲ - ۱۲\text{ا} + ۸\text{ا} - ۶۸ + ۲۲\text{ب} - ۱۲ = ۰ \text{ ہے۔}$$

$$\text{اس کو } \frac{۱۲}{۸} - ۱۲\text{ا} + \frac{۱۲}{۸} - ۱۲\text{ا} + \frac{۲۲}{۸} = ۱ \text{ لکھ سکتے ہیں}$$

$$\text{یعنی } \frac{۱۲}{۸} - ۱۲\text{ا} + \frac{۲۲}{۸} = ۱$$

پس تراش مخروط کے نصف محور مساوات $\frac{1}{ص} - (ا + ب) \frac{1}{ص} + ا ب - ح = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

$$\text{یعنی } \frac{1}{ص} - (\frac{1}{۱۰} + \frac{۱۴}{۸۰}) \frac{1}{ص} + \frac{۱۴}{۸۰۰} - \frac{۹}{۱۶۰۰} = ۰ \text{ کی اصلیں}$$

$$\therefore \frac{1}{ص} - \frac{۵}{۱۶ ص} + \frac{1}{۶۴} = ۰ \text{ یعنی } ص = ۲۰ \text{ یا } ۶۴$$

$$\therefore ص = ۲ \text{ یا } ۱۶ \text{ اور مساوات } \frac{۱}{ص} + \frac{۱}{۱۶} = ۱$$

\therefore تراش مخروط قطع ناقص ہے جس کے نصف محوروں کی قیمت ۴ اور ۲ ہے۔
ان محوروں کی سمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات $(ا - ص) \frac{1}{ص} + لا + ح = ۰$ استعمال کرنے سے اعظم محور کی مساوات $(\frac{۱۴}{۸۰} - \frac{۱}{۱۶}) لا - \frac{۱۶}{۸۰} = ۰$ حاصل ہوتی ہے جس سے $لا = ۲$ یعنی $م = ۲$

$$\text{اور اقل محور کی مساوات } (\frac{۱۴}{۸۰} - \frac{۱}{۴}) لا - \frac{۱۶}{۸۰} = ۰ \text{ جس سے } لا = -\frac{۱}{۴} \text{ یعنی } م = -\frac{۱}{۴}$$

$$\text{مثال (۲) } ۴ لا - لا ۸ + لا ۴ + لا ۶ - لا ۸ + ۱ = ۰$$

اس مساوات میں دوسرے درجے کی رقموں سے ایک مکمل مربع بنتا ہے۔

$$\text{پس } (۱۲ - لا) ۲ + لا ۶ - لا ۸ + ۱ = ۰$$

$$\text{لہذا } (۱۲ - لا) ۲ = لا ۲ - لا ۶ + لا ۸ - ۱$$

$$= لا ۲ - لا ۶ + لا ۸ - ۱$$

$$\text{خطوط } (۱۲ - لا) ۲ = لا ۲ - لا ۶ + لا ۸ - ۱ \text{ اور } لا ۲ - لا ۶ + لا ۸ - ۱ = ۰$$

$$\text{بارہدگیر علی القوائم ہونگے اگر } ۲ (۱۲ - لا) + (۸ - لا) = ۰$$

$$\text{یعنی اگر } لا = \frac{۴}{۳}$$

$$\therefore (۱۲ - \frac{۴}{۳}) ۲ = لا ۲ - لا ۶ + لا ۸ - ۱$$

منحنی کے مرکز کے محددوں (لا، ما) کی تعین

$$لا - لا۵ + ما۵ = ۸ + ۰ = ۰ اور لا۵ + ما۵ = ۲۰ + ۰ = ۰ سے ہوتی ہے$$

$$\therefore لا = ۴ اور ما = ۰$$

مرکز میں سے گزرنے والے ابتدائی محوروں کے متوازی محوروں کے حوالہ سے تراش مخروط کی مساوات
لا - لا۵ + ما۵ + ما۴ + (۴ - ۱) = ۱۵ + ۰ یعنی لا - لا۵ + ما۵ + ما۴ = ۱ ہے

اس تراش مخروط کے نصف محور مساوات $\frac{۱}{ص} - \frac{۲}{ص} + ۱ - \frac{۲۵}{ص} = ۰$ کی اصلیں ہیں۔

اس کو حل کرنے سے $ص = ۲$ یا $\frac{۲}{ص} - \frac{۲}{ص} = ۱$ جس سے $ص = \frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۱}{۲} = ۱$ چونکہ ایک نصف محور خیالی ہے اس لیے تراش مخروط قطع زائد ہے۔

اس کی حقیقی محور کی سمت مساوات $(۱ - \frac{۴}{ص}) لا - \frac{۵}{ص} ما = ۰$ یعنی $لا + ما = ۰$ سے حاصل ہوتی ہے۔

(ز) دوم درجہ کی عام مساوات سے قطع زائد کے متقاربوں

کی تعین۔

صفحہ (۲۲۲) پر بتایا گیا ہے کہ قطع زائد اور اس کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف ایک مستقل کا فرق ہے۔

پس جب لا + لا۲ + ح لا + ما + ما۲ + گ لا + ف۲ + ج۲ = ۰ (۱)
تراش مخروط کی مساوات ہے۔

نو لا + لا۲ + ح لا + ما + ما۲ + گ لا + ف۲ + ج۲ + لہ = ۰ (۲)
اس کے متقاربوں کی مساواتیں ہوں گی۔

بشرطیکہ کہ کو ایسی قیمت دی جائے جس کی وجہ سے مساوات (۲)
دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے۔

اس کے لیے مساوات کو محض لا کی دو درجہ مساوات تصور کر کے اس کو حل کرتے ہیں
لاحظہ ہو صفحہ (۱۳۳)۔

$$چنانچہ لا + لا۲ + (ح لا + ما + گ لا) + (ب ما + ف۲ + ج۲ + لہ) = ۰$$

$$\therefore لا = \frac{- (ح لا + ما + گ لا) \pm \sqrt{(ح لا + ما + گ لا)² - ۴ (ب ما + ف۲ + ج۲ + لہ)}}{۲}$$

پس $۱لا + ۲ح + ۱ا + گ = ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح - ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح + ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح$

$$= ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح - ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح + ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح$$

یہ مساوات ۱ لا + ۲ ب + ۱ ج = ۰ کی شکل میں تحویل ہونے کے لیے ضروری اور کافی ہوگا کہ جذر المربع کی علامت کے نیچے کی مقدار کامل مربع ہو۔ اس کے لیے شرط یہ ہے کہ

$$(۲ح - ۱ا - ۲گ - ۲ح) = (۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح)$$

اس کو پھیلا کر ا ب پر تقسیم کرنے سے

$$۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح$$

مساوات کے بائیں جانب کا جملہ میٹر کہلاتا ہے اور Δ سے تعبیر ہوتا ہے۔ پس

$$\Delta + ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = ۰ \text{ اس لیے } ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = -\Delta$$

لہذا دوسرے درجہ کی عام مساوات والے قطع زائد کے متقاربوں کی مساواتیں حسب ذیل مساوات میں شامل ہیں :

$$۱لا + ۲ح + ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح - ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = -\Delta$$

دو مزدوج قطعات زائد کی مساواتوں اور ان کے متقاربوں کی مساواتوں میں صرف مستقلوں ہی کا فرق ہوتا ہے جو باہدیکر مساوی اور مخالف ہوتے ہیں۔ پس مساوات (۱) والے قطع زائد کے مزدوج کی مساوات

$$۱لا + ۲ح + ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح - ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = -\Delta$$

نتیجہً صریح - خطوط متقیم جن کی تعبیر مساوات ۱لا + ۲ح + ۱ا + ۲ا + ۲گ + ۲ح - ۱ا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = ۰ سے ہوتی ہے تراش محروط کے متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

مثال - تراش محروط ۱لا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = ۰ کے متقارب معلوم کرو۔

ان متقاربوں کی مساوات ۱لا - ۲ا - ۲گ - ۲ح = ۰ ہے

$$\text{یعنی } 0 = \left(1 + \frac{x}{a}\right)^2 + 2c \frac{x}{a} + a^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 =$$

$$\text{یہ خطہ ایک دیگر منطبق ہوگا اگر } \left(1 + \frac{x}{a}\right) \left(\frac{x}{a}\right) = -c \Rightarrow$$

$$\therefore ab + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{ax}{a} = -c \Rightarrow$$

$$\text{یعنی } ab + \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{ax}{a} = -c \Rightarrow$$

$$= -c \Rightarrow \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{ax}{a} = -c \Rightarrow$$

$$\text{پس } \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{ax}{a} = -c \Rightarrow$$

$$\therefore \frac{bx}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{ax}{a} = -c \Rightarrow$$

$$\text{مثال - تراش مخروط ۵۱۰ - ۲۶ لا۱۰ + ۱۱۰ + ۱۲۶ - ۱۱۰ + ۱۱۰ = ۰ کے$$

نصف جدول کی تعبیر -

$$ab - c = 13 - 25 = 12$$

$$= ab + c + 2f = 12 + 25 + 13 = 50$$

$$= 50 - 12 = 38$$

$$\therefore = 38 - 12 = 26$$

$$\text{یعنی } 12 - 55 = 38$$

$$\therefore = 38 - 12 = 26$$

یہ ضابطہ استعمال کرنے کے پہلے مرکز کے محدود دریافت کر کے تفصیل دار
عمل کرنا بہتر ہوگا۔ اس طرح عمل کرنے سے طالب علم کو معلوم ہوگا کہ مرکز کے محدود
۱ = ۱ اور ۰ = ۰ ہیں۔

بارہویں باب کی مثالیں

۱۔ مندرجہ ذیل مخروطی تراشوں کی نوعیت اور ان کی وضعیں دریافت کرو:-

$$= 20 - 0.28 - 0.69 + 6.04 - 0.11$$

$$\therefore = 1 + 6x - 10x^2 + 6x^3 \quad (4)$$

$$= 199 + 619 + 0188 - 632 + 6022 - 001 (2)$$

$$= 40 + 69 - 1144 - 64 - 600 - 64 (2)$$

۳۔ ثابت کرو کہ اگر کسی تراش محض دو کے دو وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں تو ان کے تقاطع کا نقطہ سطحی کا مرکز ہونا چاہیے۔

سم۔ لہ کی کیا قیمت ہونی چاہیے تاکہ مساوات

$$= 9 - 14 + 13 - 6 - 10 + 12$$

خطوط مستقیم کے ایک جوڑ کو تعبیر کرے۔

م - قطع زائد ۱۶ - ۱۵ - ۱۴ - ۱۳ - ۱۲ - ۱۱ - ۱۰ =

کے متقارب دریافت کرو۔

اس قطع زائد کے مزدوج کی مساوات بھی لکھو۔

۵۔ ثابت کرو کہ اگر $1, a, a^2, a^3, \dots$ اور

$$1 = \psi_{\mu} + \psi_{\nu} + \psi_{\rho}$$

ایک ہی تراشِ مخروطہ کو تعبیر کرتے ہیں اور محدّدوں کے محورِ غلیّ القواہم ہیں تو

$$r_1^2 r + (r_1 - r_2) = r_1^2 r + (r_1 - r_2)$$

۶۔ ثابت کرو کہ درجہ دوم کی عام مساوات جس تراشِ مخروط کو تعبیر کرتی ہے وہ قائم قطع زائد ہے اگر $1 + p = 0$ ۔

۷۔ ثابت کرو کہ لا ا + ولا + با + ج = ۰ ایک قطع زائد کی عام

مساوات ہے جبکہ محدّدوں کے محور متقاربوں کے متوازی ہوتے ہیں۔

تیرہواں باب

کعبی اور عددی سہروں کی مساواتوں کا عملی حل

۶۶ - (۱) اکثر مساواتیں جن کی طبیعیات یا انجینیری میں ضرورت ہوتی ہے تقریبی طریقہ پر حل کی جاسکتی ہیں۔ یہ مساواتیں عموماً دو قسم کی ہوتی ہیں :-
 (۱) جبری مساواتیں از قسم $لا + لا + ب =$ جس میں $م < ۲$
 (۲) ماورائی مساواتیں۔ مثلاً $لا + لا + ب = لا + لا + ج$ وغیرہ
 قسم اول کی مساواتیں جبری طریقہ پر حل ہو سکتی ہیں بشرطیکہ $م = ۳$ یا $م = ۴$ لیکن یہ جبری طریقہ اکثر طویل اور وقت طلب ہوتے ہیں۔ ترقیبی طریقہ زیادہ آسان اور زود عمل ثابت ہوتا ہے۔ اگر جبری مساوات میں $م$ کی قیمت ۴ سے زائد ہو تو اس کے جبری حل کا کوئی طریقہ نہیں دریافت ہوا ہے اور نہ ماورائی مساواتوں کا کوئی جبری طریقہ موجود ہے۔

ترقیبی طریقہ میں یا تو واحد طریق مرتسم کیا جاتا ہے یا ایک ہی کاغذ پر دو طریق مرتسم کر کے ان کے تقاطع کے نقطہ دریافت کیے جاتے ہیں۔ واضح ہے کہ ان طریقوں سے مساواتوں کی صرف حقیقی اصلیں معلوم ہو سکیں گی اور وہ بھی تقریبی طور پر۔ اس کے بعد تجزیاتی ذرائع سے مدد لے کر ان اصولوں کی قیمت مطلوبہ درجہ صحت تک دریافت کی جاسکتی ہے۔

(ب) ہورنر (Horner) کا تقریبی طریقہ —

فرض کرو مساوات کثیر رقمی ہے اور شکل ف (لا) = . لکھی جاسکتی ہے۔

(۱) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد m اور n دریافت کیے جائیں جن کے مابین مساوات ف (لا) = . کی ایک اصل عدد واقع ہوتی ہے۔
(سر دست یہ فرض کیا جائے کہ ان دو متصل صحیح عددوں کے مابین کوئی دوسری اصل موجود نہیں ہے)۔

(۲) مساوات ف (ما) = . تیار کرو جس کی اصلیں مصرعہ بالا اصولوں سے بقدر کم ہوں۔ واضح ہے کہ اس نئی مساوات ف (ما) = . کی وہ اصل جو جمع کے متناظر ہے ف (ما) = . کی صرف ایک ہی ایسی اصل ہے جو صفر اور ۱ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے کہ نئی مساوات کی اصل سابقہ مساوات کی اصل سے بقدر کم ہے۔

(۳) حسابی عمل کی دقتوں سے بچنے کے لیے جو صفر اور ۱ کے مابین کسری اصل واقع ہونے سے پیدا ہوتی ہیں ایک مساوات ف (لا) = . تیار کی جائے جس کی اصلیں (ہر ایک) ف (ما) = . کی اصلوں کی وہ چند ہوں۔

واضح ہے کہ ف (لا) = . کی ایک اصل بوجہ عمل (۱) صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے۔

(۴) آزمائش سے دو متصل صحیح اعداد m اور n دریافت کرو جن کے مابین ف (لا) = . کی مطلوبہ اصل واقع ہے۔
پس مساوات ف (لا) = . کی اصل عدد بموجب طریقہ کتابت گنا اعشاریہ m اور n (۱ + m) اور کے درمیان واقع ہوگی۔

(۵) اسی طرح عمل کرتے ہوئے مساوات ف (ما) = . دریافت کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف (لا) = . کی اصلوں سے بقدر کم ہوں اور اس کے بعد مساوات ف (لا) = . معلوم کرو جس کی اصلیں (ہر ایک) مساوات ف (ما) = . کی اصلوں کی وہ چند ہوں۔

پس ظاہر ہے کہ اعشاریہ کے جس مقام تک صحت کے ساتھ اصل قیمت

دریافت کرنا مقصود ہو دریافت کی جاسکتی ہے۔

مثال - مساوات ف (لا) $\equiv ۲ لا^۳ - ۴ لا^۲ + لا + ۳ = ۰$

کی ایک اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔ اعتدال کے دو مقاموں تک صحت کے ساتھ اس کی قیمت دریافت کرو۔

(۱) چونکہ ف (۳) = ۲ - اور ف (۴) = ۳۴ مساوات کی

ایک اصل ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے۔

(۲) ف (لا) = کی اصلوں سے بقدر ۳ کمتر اصلوں کی مساوات

تیار کرنے کے لیے $ما = لا - ۳$ یعنی $لا = ما + ۳$ لکھو۔ پس

$$۲ (۳ + ما)^۳ - ۴ (۳ + ما)^۲ + (۳ + ما) + ۳ = ۰$$

$$\therefore ف (ما) \equiv ۲ ما^۳ + ۱۱ ما^۲ + ۱۳ ما - ۲ = ۰$$

(۳) ف (ما) = کی اصلوں کے وہ چند اصلوں کی مساوات

بنانے کے لیے $لا = ۱۰ ما$ لکھو

یعنی $ما = \frac{لا}{۱۰}$ - تب

$$ف (لا) \equiv لا^۳ + ۵۵ لا^۲ + ۶۵۰ لا - ۱۰۰۰ = ۰$$

(۴) آزمائش سے دریافت ہوتا ہے کہ ف (لا) = کی مطلوبہ

اصل جو صفر اور ۱۰ کے درمیان واقع ہے فی الحقیقت ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

(۱) پس ۳ کی قیمت ۱ اور ۲ کے مابین ہے۔

(۲) ف (لا) = کی اصلوں سے بقدر ۱ کمتر اصلوں والی مساوات

تیار کرنے کے لیے

$$ما = لا - ۱$$

$$یعنی لا = ما + ۱$$

$$(ما + ۱)^۳ + ۵۵ (ما + ۱)^۲ + ۶۵۰ (ما + ۱) - ۱۰۰۰ = ۰$$

$$یعنی ف (ما) \equiv ما^۳ + ۵۸ ما^۲ + ۶۶۳ ما - ۲۹۲ = ۰$$

(۳) ف (ما) = کی اصلوں کی وہ چند اصلوں والی مساوات تیار کرنے کے لیے

$$لا = ۱۰ ما$$

$$یعنی ما = \frac{لا}{۱۰}$$

$$تب$$

مثال - ایک ایسی مساوات کی تعیین جس کی ہر ایک اصل مساوات

$$۳ لا^۳ - ۷ لا^۲ + ۲ لا - ۴ = ۰ \text{ کی ہر حقیقی اصل سے بقدر } ۵$$

کمتر ہے -
مصرعہ بالا طریقہ کے بموجب

$$\begin{array}{r} (۷) \quad \begin{array}{r} ۳ - \quad ۲ \quad ۷ - \quad ۳ \\ ۲۱۰ \quad ۴۰ \quad ۱۵ \\ \hline ۳ \equiv \underline{۲۱۰} \quad ۴۲ \quad ۸ \quad ۳ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۸) \quad \begin{array}{r} ۱۱۵ \quad ۱۵ \\ \hline ۳ \equiv \underline{۱۵۷} \quad ۲۳ \quad ۳ \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (۹) \quad \begin{array}{r} ۱۵ \\ \hline ۳ \equiv \underline{۳۸} \quad ۱ \end{array} \end{array}$$

$$۰۳ \equiv ۱$$

پس مطلوبہ مساوات $۳ لا^۳ + ۳۸ لا^۲ + ۱۵۷ لا + ۲۱۰ = ۰$ ہے
مثال کے طور پر مساوات $۳ لا^۳ - ۷ لا^۲ + ۲ لا - ۴ = ۰$ کی ایک
حقیقی اصل مندرجہ بالا طریقوں سے اعشاریہ کے چوتھے مقام تک محسوب
کی جاتی ہے :-

آزمائش سے (یا تریسی طریقے سے) پتہ چلتا ہے کہ مساوات کی ایک اصل
۴ اور ۵ کے مابین واقع ہے لہذا دی ہوئی مساوات کی اصلوں سے بقدر ۴ کمتر
اصلوں والی مساوات حاصل کی جاتی ہے اور جملہ عمل ایک جدول کی شکل میں ترتیب
دیا جاتا ہے -

۴	اصلی یا کمی بقدر	۱۱ ۲۰ -	۱۴ - ۱۲	۷ ۲ -	۵ - ۴	۱	نتیجہ (۱)
		<u>۹ -</u>	۵ - ۶۰	۳ ۱۲	۱ - ۴	۱	
			<u>۵۵</u>	۱۵ ۲۸	۳ ۴	۱	
				<u>۴۳</u>	۷ ۴	۱	
					<u>۱۱</u>	۱	نتیجہ (۲)
۱		۹۰۰۰۰ - ۵۹۳۱۱	۵۵۰۰۰ ۴۳۱۱	۴۳۰۰ ۱۱۱	۱۱۰ ۱	۱	نتیجہ (۱)
		<u>۳۰۵۸۹ -</u>	۵۹۳۱۱ ۴۵۲۳	۴۳۱۱ ۱۱۲	۱۱۱ ۱		
			<u>۶۳۹۳۴</u>	۴۵۲۳ ۱۱۳	۱۱۲ ۱		
				<u>۴۶۳۶</u>	۱۱۳ ۱		
					<u>۱۱۴</u>	۱	نتیجہ (۲)
۴		۳۰۵۸۹۰۰۰۰ - ۲۶۳۲۲۶۸۱۶	۶۴۹۳۴۰۰۰ ۱۸۷۲۷۰۴	۴۶۳۶۰۰ ۴۵۷۶	۱۱۴۰ ۴	۱	نتیجہ (۱)
		<u>۴۲۶۶۳۱۸۴ -</u>	۶۵۸۰۶۷۰۴ ۱۸۹۱۰۷۲	۴۶۸۱۷۶ ۴۵۹۲	۱۱۴۴ ۴	۱	
			<u>۶۷۶۹۷۷۷۶</u>	۴۷۳۷۹۸ ۴۶۰۸	۱۱۴۸ ۴	۱	
				<u>۴۷۷۳۷۶</u>	۱۱۵۲ ۴	۱	
					<u>۱۱۵۶</u>	۱	نتیجہ (۲)
۶		۴۲۶۶۳۱۸۴۰۰۰۰ - ۴۰۷۶۰۷۰۷۸۵۶	۶۷۶۹۷۷۷۶۰۰۰ ۲۸۶۸۴۱۹۷۶	۴۷۷۳۷۶۰۰ ۶۹۳۹۶	۱۱۵۶۰ ۶	۱	نتیجہ (۱)
		<u>۱۸۷۲۴۱۲۲۱۳۴ -</u>	۶۷۸۸۴۱۷۹۷۶ ۲۸۷۲۵۸۵۶۸	۴۸۰۶۹۹۶ ۶۹۳۳۲	۱۱۵۶۶ ۶	۱	
			<u>۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴</u>	۴۸۸۷۴۴۲۸ ۶۹۴۶۸	۱۱۵۷۲ ۶	۱	
				<u>۴۸۹۴۵۸۹۶</u>	۱۱۵۷۸ ۶	۱	
					<u>۱۱۵۸۴</u>	۱	نتیجہ (۲)
۳		۱۸۷۲۴۱۲۲۱۳۴۰۰۰۰ -	۶۸۲۷۱۸۷۶۵۴۴۰۰۰	۴۸۹۴۵۸۹۶۰۰۰	۱۱۵۸۴۰	۱	نتیجہ (۱)

پہلے سیاہ دبیز خط کے نیچے کی مساوات فن (لا) = ۰ کی اصلیں
مساوات فن (ما) = ۰ کی اصلوں کے بالترتیب دو چند ہیں۔

اس کے بعد آزما کر دیکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات فن (لا) = ۰
کی ایک اصل ۱ اور ۲ کے مابین واقع ہے۔ اس لیے فن (لا) = ۰ کی اصلوں کو بقدر
انگٹا کر نئی مساوات فن (ما) = ۰ تیار کی جاتی ہے۔ اس طرح عمل کے بقیہ مراتب
انجام پاتے ہیں اور وہی ہوئی مساوات کی اصل ۱۲۶۲۰۰۰۰ برآمد ہوتی ہے۔

نوٹ:۔۔۔ پہلے دو تین استمالے تکمیل پانے کے بعد بائیں جانب کے سب سے آخری
باقی سے عین پہلے کے باقی پر آخری باقی کو تقسیم کر کے اصل کا اعشاریہ کے بعد کا دوسرا ہندسہ
معلوم کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً ۸۹۰۰۰۰ کو ۳۰۵ پر تقسیم کرنے سے
ہندسہ ۴ حاصل آتا ہے۔

معیناً جب یہ مقسوم علیہ دریافت طلب ہندسوں کی تعداد سے دو زائد ہندسوں
پر مشتمل ہوتا ہے تو حسابی عمل میں حسب ذیل اختصار عام کیا جاسکتا ہے:۔

صفروں کے بڑھانے کے عوض آخری سر سے عین پہلے کے سر کا آخری ہندسہ قلمزد
کر دیا جائے اور اس سے عین پہلے کے سر کے آخری دو ہندسے قلمزد کیے جائیں وغیرہ وغیرہ۔ پس
دوسرے دبیز خط کے نیچے کا حسابی عمل اختصار کے ساتھ یوں لکھا جاسکتا ہے:۔

$$\begin{array}{r}
 ۸۸۸۸۸ \times ۳۶۳۵ = ۶۳۹۳۴ - ۳۰۵۸۹ = ۳۰۱۲۶۳ \\
 \begin{array}{r}
 ۱۸۲ \\
 ۶۵۷۷ \\
 ۱۸۲ \\
 \hline
 ۶۷۶۹ \\
 ۲۲۵ - \\
 ۲۰۱ \\
 \hline
 ۲۴ -
 \end{array}
 \end{array}$$

پہلی مرتبہ جب ہندسوں کو قلمزد کرتے ہیں تو پہلے اور دوسرے سر ساقط ہو جاتے
ہیں۔ جب دوسری مرتبہ ہندسے قلمزد کیے جاتے ہیں تو تمام سرسوں کو آخری دو کے
ساقط ہو جاتے ہیں اور اس کے بعد کا عمل معمولی اختصاری تقسیم کے ذریعہ اختتام کو پہنچا ہے۔

(۵) منطق سروں کی مساوات میں اصم اصولوں کے زوج ہوتے ہیں۔
 (۶) مساوات ف (لا) = کی مثبت اصولوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ
 اتنی ہی ہو سکتی ہے جتنی کہ جملہ ف (لا) میں علامات کی تبدیلیاں ہیں اور اس کی
 منفی اصولوں کی تعداد زیادہ سے زیادہ اتنی ہو سکتی ہے جتنی کہ جملہ ف (لا) میں
 علامات کی تبدیلیاں ہیں۔ یہ کلیہ ڈیکارٹس (Descartes) کا علامتوں
 کا قانون یا قاعدہ کہلاتا ہے۔

(۷) طاق درجہ کی ہر مساوات کی کم از کم ایک حقیقی اصل ہوتی ہے
 جس کی علامت مساوات کی آخری رقم کی علامت کے برعکس ہوتی ہے۔
 (۸) اگر کسی مساوات کا درجہ جفت اور اس کی آخری رقم منفی ہو تو اس کی
 کم از کم دو اصلیں حقیقی ہوں گی جن میں سے ایک مثبت ہوگی اور دوسری منفی۔

۶۸۔ کعبی مساواتیں - کارڈان (Cardan) کا حل۔

فرض کرو کہ کعبی مساوات $x^3 + px + q = 0$ (۱) ہے
 جس میں x ، p اور q عام طور پر ملحق (Complex) اعداد ہیں۔

اب بجائے x کے $y + \sqrt{-1}z$ لکھو (۲)

تب $y + \sqrt{-1}z$ $(y + \sqrt{-1}z)^3 + p(y + \sqrt{-1}z) + q = 0$

یعنی $y^3 + 3y^2\sqrt{-1}z + 3y\sqrt{-1}z^2 + \sqrt{-1}z^3 + p(y + \sqrt{-1}z) + q = 0$

$(y^3 + 3y^2\sqrt{-1}z + 3y\sqrt{-1}z^2 + \sqrt{-1}z^3) + p(y + \sqrt{-1}z) + q = 0$ (۳)

مقصد یہ ہے کہ جملہ سے رقم جس میں $\sqrt{-1}$ شریک ہے معدوم ہو جائے۔
 پس y کی قیمت ایسی ہونی چاہیے کہ

$$y + \sqrt{-1}z = 0 \quad \text{یعنی} \quad y = -\sqrt{-1}z$$

مساوات (۳) کو $\sqrt{-1}z$ پر تقسیم کرنے سے

مساوات $۳\text{ما} + ۳\text{پ} + \text{ما} + \text{ق} = ۰$ (۴) حاصل ہوتی ہے۔
اور یہی مساوات کی معیاری شکل ہے۔

اس کے حل کے لیے فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{ع} + \text{و}$

$$\therefore \text{ع}^۳ + \text{و}^۳ + ۳(\text{ع} + \text{و})^۲ + (\text{ع} + \text{و}) + \text{ق} = ۰ \dots\dots\dots (۵)$$

چونکہ ہمیں دو غیر معلوم مقادیر سے سابقہ پڑا ہے اس لیے ہم ان کا اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ وہ رابطہ (۵) کی تطبیق کرے اور نیز رابطہ

$$\text{ع} + \text{و} + \text{پ} = ۰ \dots\dots\dots (۶)$$

$$\text{ع} + \text{و} + \text{ق} = ۰ \dots\dots\dots (۷)$$

مساوات (۷) میں و کی قیمت $-\frac{\text{ق}}{\text{ع}}$ درج کرنے سے $\text{ع}^۳ - \frac{\text{ق}^۳}{\text{ع}^۳} + \text{ق} = ۰$

$$\text{یعنی } \text{ع}^۳ + \text{ق} - \frac{\text{ق}^۳}{\text{ع}^۳} = ۰$$

$$\therefore \text{ع}^۳ = \frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}} = \frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}$$

۳ع کی ان دو قیمتوں میں سے مثبت علامت کی ایک قیمت لو

$$\text{یعنی } \text{ع}^۳ = \frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}} = \frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}} \text{ جبکہ } \text{و} = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}}$$

ازدوئے رابطہ (۶)

$$\text{معہذا } \text{ع} = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}} \text{ جبکہ } \text{و} = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}}$$

$$\text{اور } \text{ع} = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}} \text{ جبکہ } \text{و} = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}}$$

$$\therefore \text{ما} = (\text{ع} + \text{و}) = \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}} + \sqrt[۳]{\frac{\text{ق}^۳ - \text{ق}}{\frac{1}{\text{ع}^۳}}}$$

$$\text{یا سہ } \left(\frac{-ق + \sqrt{ق^2 + ۴پ۳}}{۲} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-ق - \sqrt{ق^2 + ۴پ۳}}{۲} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ سہ}$$

$$\text{یا سہ } \left(\frac{-ق + \sqrt{ق^2 + ۴پ۳}}{۲} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-ق - \sqrt{ق^2 + ۴پ۳}}{۲} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ سہ}$$

جن میں سہ اور سہ^۲ اکائی کے خیالی جذرا لکعب ہیں۔

(۱) اگر ق^۲ + ۴پ^۳ مثبت ہے تو ع^۳ اور و^۳ دونوں حقیقی ہیں۔
فرض کرو کہ ع اور و بالترتیب ع^۳ اور و^۳ کے حسابی جذرا لکعب ہیں۔ تب
کعبی مساوات کی اصلیں

ع + و، سہ + ع^۲ + و^۲ اور سہ^۲ ع + سہ و ع^۲ ہیں۔
ان میں کی پہلی اصل (ع + و) حقیقی ہے اور سہ اور سہ^۲ کی قیمتیں
درج کرنے سے باقی ماندہ دو اصلیں

$$\frac{ع + و}{۲} + \sqrt{۳} - \frac{ع - و}{۲} \text{ اور } -\frac{ع + و}{۲} - \sqrt{۳} - \frac{ع - و}{۲}$$

ہو جاتی ہیں۔

(۲) اگر ق^۲ + ۴پ^۳ صفر ہے تو ع^۳ = و^۳ اور ع = و اور
اصلیں ع^۲، ع (سہ + سہ^۲)، ع (سہ^۲ + سہ) یعنی ع^۲، ع اور ع^۲۔
ہو جاتی ہیں۔

(۳) اگر ق^۲ + ۴پ^۳ منفی ہے تو ع^۳ اور و^۳ خیالی جملے ہو جاتے
ہیں اور ع + و، ع^۲ + و^۲ اور ع^۲ - و^۲ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔ فرض کرو کہ
ان مقادیر کے جذرا لکعب م + خن اور م - خن ہیں۔ تب کعبی مساوات
کی اصلیں

م + خن + م - خن یعنی ۲م،
سہ (م + خن) + سہ^۲ (م - خن) یعنی م - ن، م^۲ - ۳ن،
سہ^۲ (م + خن) + سہ (م - خن) یعنی م + ن، م^۲ - ۳ن ہو جاتی
ہیں۔

جو سب کے سب حقیقی مقادیر ہیں لیکن چونکہ خیالی مقادیر کے جذر الکعب کی ٹھیک قیمت دریافت کرنے کا کوئی عام حسابی یا جبری طریقہ موجود نہیں ہے اس لیے کارڈان کے طریقہ کا حل علی نقطہ نظر سے کچھ سودمند نہیں ہوتا ہے جبکہ کبھی مساوات کی تنزیل اصلیں حقیقی اور غیر مساوی ہوتی ہیں۔ پس اس صورت کو کارڈان کے حل کی ناقابلِ تخیل صورت کہتے ہیں۔

واضح ہو کہ ہر حالت میں کبھی مساوات کی حقیقی اصلیں کارڈان کے حل کی بہ نسبت ہوہر نو کے تقریبی طریقہ سے زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت کی جاسکتی ہیں۔

مثال - مساوات $x^3 - 3x - 9 = 0$ کو حل کرو (۱)

چونکہ مساوات معیاری شکل کی ہے (یعنی x^3 کی رقم معدوم ہے)

لہذا فرض کرو $x = u + v$ (۲)

$\therefore u^3 + v^3 + 3(u+v)(u^2 - uv + v^2) - 3(u+v) - 9 = 0$ (۳)

$u^3 + v^3 - 9 = 0$ اور $u + v = 3$ ایسے منتخب کرو کہ (۴)

$\therefore u^3 + v^3 - 9 = 0$ (۵) اور (۳) کے

(۴) اور (۵) کے مابین و کو ساقط کرو۔

$$\therefore u^3 + v^3 - 9 = 0$$

$$\text{یعنی } u^3 + v^3 - 9 = 0$$

$$\therefore u^3 + v^3 - 9 = 0$$

پس و کی تناظر قیمتیں رابطہ (۴) کی رو سے

$$u^3 + v^3 - 9 = 0$$

پس دی ہوئی مساوات کی تین اصلیں ۳، ۲ + ۲، ۲ - ۲ سے ہیں۔

تیرہویں باب کی مثالیں

(۱) - ہوہر نو کے تقریبی طریقہ سے ذیل کی مساواتوں کی مثبت اصلیں اشاریہ

چوتھے مقام تک دریافت کرو۔

$$(۱) \quad \text{لا}^۴ + \text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ - ۱۶ = ۰$$

$$(ب) \quad \text{لا}^۵ - ۲ = ۰$$

$$(ج) \quad \text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ + ۴۵۸ - ۱۳۷۹ = ۰$$

$$(۳) \quad \text{لا}^۴ + \text{لا}^۳ - \text{لا}^۲ + ۳ + ۱ = ۰ \text{ کی منفی اصل (جو صفر اور -۱ کے درمیان واقع ہے) دریافت کرو۔}$$

(۳) $\text{لا}^۴ - \text{لا}^۳ - ۱۷ + ۳ = ۰$ کی حقیقی اصلیں اعشاریہ کے تیسرے مقام تک دریافت کرو۔

$$(۴) \quad \text{مسادات } ۸ - \text{لا}^۳ - ۶۰ + \text{لا}^۲ + ۱۱۰۲ + ۶۷ = ۰ \text{ کو حل کرو۔}$$

(۵) ذیل کی کبھی مساواتوں کو جبری طریقہ سے حل کرو۔

$$(۱) \quad \text{لا}^۳ - ۱۲ + ۶۵ = ۰$$

$$(ب) \quad \text{لا}^۴ - ۴۸ - ۵۲۰ = ۰$$

$$(ج) \quad \text{لا}^۳ - ۲ + ۵ = ۰$$

(۶) فین ڈیروال (Van der Waals) کی مساوات

$$(د + \frac{1}{C}) = (ب - ح) = \text{حرت}$$

کو (جس میں د اور ح گیس کا دباؤ اور حجم ہیں؛ دت مطلق تپش اور ا ب، ح متقل مقادیر ہیں) بطور ح کی کبھی مساوات کے ترتیب دے کر حل کرو جبکہ اس کی تینوں اصلیں حقیقی اور مساوی ہیں یعنی گیس کا فاصل (Critical) حجم دریافت کرو۔

[جواب = ۳ ب]

(۷) اس طرح کلاؤسیوس (Clausius) کی مساوات

$$د = \frac{\text{حرت}}{(ح - ح۴)} - \frac{ک}{د(ح + ب)}$$

کو (جس میں د ح اور دت بالترتیب گیس کا دباؤ حجم اور مطلق تپش ہیں اور ح۴، ب اور ک متقل مقادیر ہیں) بطور ح کی کبھی مساوات کے ترتیب دے کر بتاؤ کہ گیس کا فاصل حجم ۳ + ۲ ب ہے۔

$$+ \text{جب } (ع + \frac{\sqrt{5}}{4}) - \text{جب } (ع + \frac{\sqrt{3}}{4}) + \dots +$$

$$+ \text{جب } \{ع + (1 - \frac{1}{2})\} - \text{جب } \{ع + (3 - \frac{1}{2})\} + \dots +$$

$$= \text{جب } \{ع + (1 - \frac{1}{2})\} - \text{جب } (ع - \frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$\therefore \text{سن} = \frac{\text{جم } 2 \{ع + (1 - \frac{1}{2})\} \text{جب } \frac{1}{4}}{\text{جب } \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

(ب) سلسلہ جب ع + جب (ع + ب) + جب (ع + ۲ ب) +
کی ن رقموں کا حاصل جمع -

فرض کرو سن = جب ع + جب (ع + ب) + +

+ جب {ع + (۱ - ن)} ب
مساوات کے دونوں ارکان کو ۲ جب $\frac{\sqrt{3}}{4}$ سے ضرب دو -

تب ۲ جب $\frac{\sqrt{3}}{4}$ سن = ۲ جب ع جب $\frac{\sqrt{3}}{4}$ + ۲ جب (ع + ب) جب $\frac{\sqrt{3}}{4}$ + ...

+ ۲ جب {ع + (۱ - ن)} ب جب $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$= \text{جم } (ع - \frac{\sqrt{3}}{4}) - \text{جم } (ع + \frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$+ \text{جم } (ع + \frac{\sqrt{3}}{4}) - \text{جم } (ع + \frac{\sqrt{3}}{4}) + \dots +$$

$$+ \text{جم } \{ع + (\frac{3 - \frac{1}{2}}{2})\} - \text{جم } \{ع + (\frac{1 - \frac{1}{2}}{2})\} + \dots +$$

$$= \text{جم } (ع - \frac{\sqrt{3}}{4}) - \text{جم } \{ع + (ن - \frac{1}{4})\}$$

$$\therefore \text{سن} = \frac{\text{جب} \{ \text{عہ} + (\text{ن} - ۱) \frac{\pi}{۲} \}}{\text{جب} ۲ \frac{\pi}{۲}}$$

سوالات ۱۴ (۱)

(۱) مندرجہ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$(۱) \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۴ ط + \text{جم } ۶ ط + \dots$$

$$(ب) \text{جب } ط + \text{جب } ۳ ط + \text{جب } ۵ ط + \dots$$

(۲) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$(۱) \text{جم عہ} - \text{جم} (\text{عہ} + ب) + \text{جم} (\text{عہ} + ۲ ب) - \text{جم} (\text{عہ} + ۳ ب) + \dots$$

$$(ب) \text{جب عہ} - \text{جب} (\text{عہ} + ب) + \text{جب} (\text{عہ} + ۲ ب) - \text{جب} (\text{عہ} + ۳ ب) + \dots$$

[ہدایت - ب = π + ب لکھو]

(۳) ذیل کے سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو:-

$$(۱) \text{جم } ط + \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط + \dots$$

$$(ب) \text{جب } ط + \text{جب } ۲ ط + \text{جب } ۳ ط + \dots$$

$$[\text{ہدایت} - \text{جم } ۲ ط = \frac{۱ + \text{جم } ۲ ط}{۲}]$$

$$\text{اور جب } ط = \frac{۱ - \text{جم } ۲ ط}{۲} \text{ لکھو}$$

(۴) ثابت کرو کہ

$$\text{سن } ط = \frac{\text{جب } ط + \text{جب } ۳ ط + \text{جب } ۵ ط + \dots + \text{جب} (۱ - ۲) ط}{\text{جم } ط + \text{جم } ۳ ط + \text{جم } ۵ ط + \dots + \text{جم} (۱ - ۲) ط}$$

(ج) سلسلہ قم ط + قم ۲ ط + قم ۳ ط + کی ن رقموں کا

حاصل جمع -

$$\text{چونکہ} \quad \text{قم } ط - \text{قم } ۲ ط = \frac{۱}{۲} \quad \text{جب } ۲ \frac{\pi}{۲} \text{ جم } ط - \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{\pi}{۲}$$

$$= \frac{1 - \text{جم } ۲ ط}{\text{جب } ۲ ط - \text{جم } ۲ ط} = - \text{مم ط}$$

$$\therefore \text{قم ط} = \text{مم } \frac{۲}{۲} - \text{مم ط} \text{ اسی طرح قم } ۲ ط = \text{مم ط} - \text{مم } ۲ ط$$

$$\text{قم } ۲ ط = \text{مم } ۲ ط - \text{مم } ۲ ط \dots\dots\dots$$

$$\text{اور قم } ۱ - ۲ ط = \text{مم } ۲ - ۱ ط - \text{مم } ۱ - ۲ ط$$

$$\therefore \sum_{r=1}^n \text{قم } ۲ ط = \text{مم } \frac{۲}{۲} - \text{مم } ۱ - ۲ ط$$

سوالات ۱۴ (ب)

(۱) ثابت کرو کہ $\text{قم ط} - \text{قم } ۲ ط = \text{مم ط} - \text{مم } ۲ ط$
 $\text{قم } ۲ ط - \text{قم } ۳ ط = \text{مم ط} - \text{مم } ۳ ط$ وغیرہ

اور ان کے ذریعے بتاؤ کہ $\sum_{r=1}^n \text{قم } ۲ ط = \text{مم } ۱ ط - \text{مم } (ن+۱) ط$

(۲) مندرجہ ذیل سلسلوں کی ن رقموں کا حاصل جمع دریافت کرو :-

(i) $\text{قم ط} - \text{قم } ۲ ط + \text{قم } ۳ ط - \text{قم } ۴ ط + \dots\dots\dots$

(ii) $\text{جم ط} - \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط - \text{جم } ۴ ط + \dots\dots\dots$

(iii) $\text{جم ط} - \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط - \text{جم } ۴ ط + \dots\dots\dots$

(د) سلسلہ $\text{جم } ۱ ط + \text{جم } ۲ ط + \text{جم } ۳ ط + \dots\dots\dots$

کی ن رقموں کا حاصل جمع جبکہ $\text{جم } ۱ ط + \text{جم } ۲ ط + \dots\dots\dots$ ایک سلسلہ حسابیہ ہو۔

فرض کرو $\text{جم } ۱ ط + \text{جم } ۲ ط + \dots\dots\dots$

$\text{جم } ۱ ط + \text{جم } ۲ ط + \dots\dots\dots$

$$\text{تب } ۲ \text{ جم ب س ن} = \text{ج} \cdot \{ \text{جم} (\text{ع} + \text{ب}) + \text{جم} (\text{ع} - \text{ب}) \}$$

$$+ \text{ج} \cdot \{ \text{جم} (\text{ع} + ۲\text{ب}) + \text{جم} (\text{ع} - ۲\text{ب}) \}$$

$$+ \text{ج} \cdot \{ \text{جم} (\text{ع} + ۳\text{ب}) + \text{جم} (\text{ع} - ۳\text{ب}) \}$$

.....

$$+ \text{ج} \cdot \{ \text{جم} (\text{ع} + \text{ن ب}) + \text{جم} (\text{ع} - \text{ن ب}) \}$$

$$\therefore ۲ (۱ - \text{جم ب}) \text{س ن} = (\text{ج} - \text{ج} ۲) \text{جم ع}$$

$$+ (\text{ج} ۲ - \text{ج} - \text{ج} ۱) \text{جم} (\text{ع} + \text{ب})$$

$$+ (\text{ج} ۲ - \text{ج} - \text{ج} ۲) \text{جم} (\text{ع} + ۲\text{ب})$$

$$+ \dots +$$

$$+ (\text{ج} ۲ - \text{ج} ۲ - \text{ج} ۱) \text{جم} (\text{ع} + \text{ن ب})$$

$$+ (\text{ج} ۲ - \text{ج} ۱ - \text{ج} ۲) \text{جم} (\text{ع} + \text{ن ب})$$

$$- \text{ج} \cdot \text{جم} (\text{ع} - \text{ب}) - \text{ج} \cdot \text{جم} (\text{ع} + \text{ن ب})$$

لیکن اگر ج، ج، ج، سلسلہ حسابیہ میں ہوں تو

$$۲ \text{ ج} = \text{ج} ۱ + \text{ج} ۲$$

$$\therefore ۲ (۱ - \text{جم ب}) \text{س ن} = (\text{ج} - \text{ج} ۲) \text{جم ع} + (\text{ج} ۲ - \text{ج} ۱ - \text{ج} ۲) \text{جم} (\text{ع} + \text{ن ب})$$

$$- \text{ج} \cdot \text{جم} (\text{ع} - \text{ب}) - \text{ج} \cdot \text{جم} (\text{ع} + \text{ن ب})$$

جس سے س ن کی قیمت برآء ہو جاتی ہے۔

طالب علم کو چاہیے کہ اس طرح سلسلہ

$$\text{ج} \cdot \text{جب ع} + \text{ج} \cdot \text{جب} (\text{ع} + \text{ب}) + \text{ج} \cdot \text{جب} (\text{ع} + ۲\text{ب}) + \dots$$

کی ن رتوں کا حاصل جمع دریافت کرے جبکہ ج، ح ایک سلسلہ حسابیہ ہو۔

سوالات نمبر ۱۴ (ج)

مندرجہ ذیل سلسلوں کی ن رتوں کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$(۱) \text{ جم } ۱ + ۲ \text{ جم } ۲ + ۳ \text{ جم } ۳ + \dots$$

$$(۲) \text{ جب } ۱ + ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ \text{ جب } ۳ + \dots$$

$$(۳) \text{ جم } ۱ - ۲ \text{ جم } ۲ + ۳ \text{ جم } ۳ - \dots$$

$$(۴) \text{ جب } ۱ - ۲ \text{ جب } ۲ + ۳ \text{ جب } ۳ - \dots$$

(ھ) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے پھیلاؤ زاویہ

کی صغی دی قوتوں کے سلسلوں میں۔
لاکی تمام قیمتوں کے لیے ثابت کرو کہ

$$\text{جب } \frac{1}{1+r^2} = \frac{1}{(1+r^2)} \sum_{r=1}^{\infty} (1-r) = \dots - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\text{اور جم } \frac{1}{r^2} = \sum_{r=1}^{\infty} (1-r) = \dots - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \dots$$

ان مسائل کا مستند باضابطہ ثبوت ہا بسن (Hobson)

برام وچ (Bromwich) وغیرہ کی کتابوں میں درج ہے۔ ۱۔ ابتدائی

احصاء کے ذریعہ بھی ان کو ثابت کر سکتے ہیں لیکن طبیعیات کے طالب علم کے

لیے ایسی باضابطگی کی چند ان ضرورت نہیں ہے۔ اس لیے یہاں ڈی مو اور

کے مسئلہ کے ذریعہ ہی سرسری ثبوت پیش کیے جاتے ہیں :-

صفحہ ۸۹ پر فصل ۴۷ میں بتایا گیا ہے کہ

$$\text{جب } n = 1 \text{ جب } 1 \text{ جم } 1 - \frac{(1-n)(1-n)}{3} \text{ جب } 2 \text{ جم } 2 - \dots$$

اور جم ن طہ = جم ن طہ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ جب ن طہ جم ن طہ +
 اول الذکر سلسلہ کی رقموں کی تعداد $\frac{۱}{۲}$ ن ہے جبکہ ن ایک جفت عدد ہے
 اور $\frac{۱}{۲}(ن+۱)$ جبکہ ن طاق عدد ہے۔ آخر الذکر سلسلہ میں $\frac{۱}{۲} ن + ۱$
 رقمیں ہیں جبکہ ن جفت عدد ہے اور $\frac{۱}{۲}(ن+۱)$ جبکہ ن طاق ہے۔

پس جب ن طہ = جم ن طہ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ مس طہ +
 = جم ن طہ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ (ن مس طہ) +
 اور جم ن طہ = جم ن طہ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ (ن مس طہ)

فرض کر دو کہ لا کوئی ایک مثبت عدد ہے اور ن طہ = لا لکھو۔ تب
 جب لا = جم $\frac{۱}{۲}$ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ (ن مس $\frac{۱}{۲}$) + (۱)

اور جم لا = جم $\frac{۱}{۲}$ - $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ (ن مس $\frac{۱}{۲}$)

+ $\frac{ن(۱-ن)}{۲}$ (ن مس $\frac{۱}{۲}$) + (۲)

لیکن نہیہ $(\frac{مس لا}{لا}) = ۱$

پس نہیہ $(ن مس \frac{۱}{۲}) = لا$

اور $n \rightarrow \infty$ نہیا $\left(\frac{n}{n}\right) = 1$

[اگرچہ واضح ہے کہ نہیا $\left(\frac{n}{n}\right) = 1$ جبکہ n کوئی معین قیمت کا عدد ہے

تاہم

نہیا $\left(\frac{n}{n}\right) = 1$ اثبوت کا محتاج ہے -

فرض کرو $m = \frac{n}{n} = \left(\frac{n}{n}\right) = \frac{n}{n}$

تب $m = \frac{n}{n} = 1$ (جب $n = 1$)

لیکن ہم جانتے ہیں کہ $1 > \frac{n}{n} = \frac{n-1}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$ جبکہ $n > 1$

$1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$ جبکہ $n > 1$

پس $1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$ جبکہ $n > 1$

$\therefore 1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$ (جب $n = 1$)

$1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$ جبکہ $n > 1$

$1 > \frac{n}{n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$ چونکہ جب $n > 1$

اس سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ نہیا $m = 1$ اور اس لیے نہیا $m = 1$

(و) زاویہ کی جیب اور جیب التمام کے لیے

آئلر (Euler) کے قوت نمائی جملے -

عدد n کی تعریف قوت نمائی سلسلہ $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \dots$

سے کی جا کر فضل (۳۴) میں (دیکھو صفحہ ۷۰) بتایا گیا ہے کہ جب لا کوئی ساقی
عدو ہوتا ہے تو

$$۱ + ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \dots = ۱$$

اور یہ سلسلہ لا کی تمام حقیقی قیمتوں کے لیے مستحق ہوتا ہے
اگر خیالی متغیر $y = ۱ + x$ استعمال کیا جاتا ہے تو سلسلہ

$$۱ + y + \frac{y^2}{۲} + \frac{y^3}{۳} + \dots$$

کو شکل
..... + (جم ۲ طہ + خ جب ۲ طہ) $\frac{r^2}{۲}$ +
لکھا جاسکتا ہے جس میں

$$r = \sqrt{۱ + ۱} \text{ اور مس طہ } = \frac{۱}{۱}$$

پس سلسلہ $۱ + y + \frac{y^2}{۲} + \frac{y^3}{۳} + \dots$ کی ن رقموں کا حاصل جمع

$$\left[۱ + \text{رجم طہ} + \frac{r^2}{۲} + \text{جم ۲ طہ} + \dots + \frac{r^n}{n} \cdot \text{جم (ن-۱) طہ} \right]$$

+ خ [رجب طہ + $\frac{r^2}{۲}$ جب ۲ طہ + + $\frac{r^n}{n}$ جب (ن-۱) طہ] ہے
اوپر کے دونوں جملے r اور طہ کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہوتے ہیں۔ اس لیے
ن رقموں کے حاصل جمع کی انتہا وجود رکھتی ہے اور سلسلہ

$$۱ + y + \frac{y^2}{۲} + \frac{y^3}{۳} + \dots$$

کو y کی تعریف تصور کر سکتے ہیں، جبکہ $y = ۱ + x$ ما

$$\text{یعنی } \text{قو}^{\text{لا}} \equiv 1 + \text{خ}^{\text{لا}} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \frac{\text{لا}^5}{5} - \frac{\text{لا}^6}{6} + \frac{\text{لا}^7}{7} - \frac{\text{لا}^8}{8} + \dots$$

$$\text{اور } \text{قو}^{\text{خ}^{\text{لا}}} \equiv 1 - \text{خ}^{\text{لا}} + \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^4}{4} - \frac{\text{لا}^5}{5} + \frac{\text{لا}^6}{6} - \frac{\text{لا}^7}{7} + \frac{\text{لا}^8}{8} - \dots$$

$$\text{پس } \text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{\text{خ}^{\text{لا}}} = (1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \dots) (1 + \text{خ}^{\text{لا}} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \dots)$$

$$\text{اور } \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{خ}^{\text{لا}}} = 2 \text{خ}^{\text{لا}} (1 - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} + \dots)$$

$$\text{یعنی } \text{جم}^{\text{لا}} = \frac{\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{\text{خ}^{\text{لا}}}}{2} \text{ اور جب } \text{لا} = \text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{\text{خ}^{\text{لا}}} \text{ } \text{خ}^{\text{لا}}$$

پانچویں باب کے اکثر مسائل مصرعہ بالا روابط کی مدد سے بڑی آسانی کے ساتھ حل ہو سکتے تھے۔ لیکن طالب علم کی موجودہ حالت میں ان کا براہ راست بغیر مد خیالی مقادیر ثابت کرنا زیادہ سودمند ہے۔

جم لا اور جب لا کے لیے ابھی ابھی جو قوت نمائی جملے اخذ کیے گئے ہیں ان کی مدد سے باسانی بتایا جاسکتا ہے کہ زاویوں کے حاصل جمع یا حاصل تفریق کے مستدیر تفاضلوں کے ضابطے نہ صرف حقیقی زاویوں کے لیے صادق آتے ہیں بلکہ خیالی زاویوں پر بھی حاوی ہیں۔

$$\text{یعنی جب } (لا + ما) = \text{جب لا جم ما} + \text{جم لا جب ما}$$

$$\text{جب } (لا - ما) = \text{جب لا جم ما} - \text{جم لا جب ما}$$

$$\text{جم } (لا + ما) = \text{جم لا جم ما} - \text{جب لا جم ما}$$

$$\text{جم } (لا - ما) = \text{جم لا جم ما} + \text{جب لا جم ما}$$

ان کا ثبوت طالب علم کی مشق کے لیے اچھڑ دیا جاتا ہے۔ ثبوت میں فرض کر لیا جاسکتا ہے کہ رابطہ $\text{قو}^{\text{لا}} \times \text{قو}^{\text{ما}} = \text{قو}^{\text{لا+ما}}$ اس صورت میں بھی صحیح ہے

جبکہ لا اور مالمف مقادیر ہیں۔ اس طرح جو ضابطے جمع اور تفریق کے مسائل پر مبنی اور حقیقی زاویوں کے لیے ثابت ہو چکے ہیں مالف مقادیر کے لیے بھی صادق آتے ہیں۔

۷۔ زائدی تفاعیل۔

تعریف۔ مقدار $\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}$ خواہ مالمف ہو یا مالف ماکہ زائدی جیب کہلاتی ہے اور جہز مالمف کہلاتی ہے۔

اسی طرح مقدار $\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}$ ماکہ زائدی جیب التمام کہلاتی ہے اور جہز مالمف کہلاتی ہے۔

واضح ہو کہ زائدی ماس، قاطع، ماس التمام اور قاطع التمام زائدی جیب اور زائدی جیب التمام سے اس طرح حاصل کیے جاتے ہیں جیسا کہ معمولی ماس، قاطع، ماس التمام اور قاطع التمام معمولی جیب اور جیب التمام سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$\text{جہز مالمف} = \frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2} = \frac{\text{جہز ماکہ}}{2}$$

$$\text{قطر ماکہ} = \frac{1}{\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}} = \frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}$$

$$\text{مزمز ماکہ} = \frac{1}{\frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}} = \frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}$$

$$\text{قطر ماکہ} = \frac{1}{\frac{ق_1 - ق_2}{ق_1 + ق_2}} = \frac{ق_1 + ق_2}{ق_1 - ق_2}$$

(۱) زائدی جیب التمام اور زائدی جیب کو قائم قطع زائد کے ساتھ وہی رابطہ و تعلق ہے جو معمولی مستدیر جیب التمام اور جیب کو دائرہ کے ساتھ ہے۔

واضح ہے کہ جنرما اور جنرما کی قیمتیں جب ما اور جم ما کے قوت نامی جلوں سے محض علامت خیالی (خ) متروک کر دینے سے حاصل ہوتی ہیں۔

(۲) چونکہ خ' = -۱ لہذا جم ما خ = $\frac{قوا \cdot خ + قوا \cdot خ}{۲}$

$$= \frac{قوا + قوا}{۲} = جنرما$$

$$اور \quad جنرما خ = \frac{قوا \cdot خ - قوا \cdot خ}{۲}$$

$$= \frac{قوا - قوا}{۲} = خ$$

$$= خ = \frac{قوا - قوا}{۲} = جنرما$$

یعنی جم (ما خ) = جنرما، جب (ما خ) = خ جنرما اور مس (ما خ) = مسرما

(۳) پس مصرعہ بالا روابط سے براہ راست یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ جو کوئی عام ضابطہ زاویوں کی جیب تمام سے متعلق ہے اگر اس میں بجائے جم کے جنرما لکھا جائے تو بھی صحیح رہیگا۔

نیز ہر وہ عام ضابطہ جس میں کسی زاویہ کی جیب تمام اور مربع جیب شامل ہیں صحیح ہے اگر جم کی بجائے جنرما اور جب کی بجائے جنرما لکھا جائے۔ اسی طرح مس کے ضابطے بھی صحیح رہتے ہیں اگر مس کے عوض مسرما لکھا جائے۔

(۴) چونکہ جنرلا = $\frac{۱}{۲} (قوا + قوا)$ اور جنرلا = $\frac{۱}{۲} (قوا - قوا)$

قوا اور قوا کو ھ کے بموجب پھیلانے سے

$$جنرلا = ۱ + \frac{قوا}{۲} + \frac{قوا}{۴} + \frac{قوا}{۸} + \dots$$

$$\text{اور جبر لا} = لا + \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} + \frac{لا^۷}{۷} + \dots$$

مثال (۱) جملہ مس (ع + ب - خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علیحدہ کرو۔

$$\text{مس (ع + ب - خ)} = \frac{\text{جب (ع + ب - خ)}}{\text{جم (ع + ب - خ)}}$$

$$= \frac{۲ \text{ جب (ع + ب - خ) جم (ع - ب - خ)}}{۲ \text{ جم (ع + ب - خ) جم (ع - ب - خ)}}$$

$$= \frac{\text{جب ۲ ع + جب ۲ ب - خ + جب ۲ ع}}{\text{جم ۲ ع + جم ۲ ب - خ + جم ۲ ع}} =$$

مثال (۲) جملہ جمز (ع + ب - خ) کے حقیقی اور خیالی حصص کو علیحدہ کرو۔

$$\text{جمز (ع + ب - خ)} = \text{جم} \{ \text{ع + ب - خ} \} = \text{جم (ع - خ - ب)}$$

$$= \text{جم (ع - خ) جم ب + جب (ع - خ) جب ب}$$

$$= \text{جمز ع جم ب + خ جمز ع جب ب}$$

بہودھویں باب کی مثالیں

(۱) جم لا اور جب لا کے لیے قوت نمائی جملے استعمال کر کے مندرجہ ذیل

ضابطے ثابت کرو لا اور ما حقیقی ہوں یا ملتف

$$(ا) \text{ جم لا + جب لا} = ۱$$

$$(ب) \text{ جم لا} = \text{جم لا} - \text{جب لا} = ۱ - ۲ \text{ جب لا}$$

$$(ج) \text{ جب لا} = ۳ \text{ جب لا} - ۲ \text{ جب لا}$$

$$(د) \text{ جم لا - جم ما} = ۲ \text{ جب} \frac{لا + ما}{۲} \text{ جب} \frac{لا - ما}{۲}$$

$$(ه) \text{ جب لا - جب ما} = ۲ \text{ جم} \frac{لا + ما}{۲} \text{ جب} \frac{لا - ما}{۲}$$

(۲) ثابت کرو کہ

(۱) جمر (ع + ب) = جمر ع جمر ب + جمر ع جمر ب
 (ب) جمر (ع + ب) - (جمر ع - ب) = ۲ جمر ع جمر ب
 (ج) جمر لا + جمر (لا + ا) + جمر (لا + ا) + ن رقموں تک

$$= \frac{\text{جمر (لا + ا)} + \frac{1-n}{2} \text{ جمر}}{\frac{n+1}{2}}$$

جمر $\frac{1}{2}$

جوابات

نصاب ذیلی ریاضی

حصہ اول

پہلا باب (۱)

(۱) چوتھی اور پانچویں رقم - قیمت = $\frac{4}{143}$

(۲) ۲۲۷۲

ایضاً (ب)

(۱) مثبت تیسری رقم سے شروع ہوتا ہے۔

(۲) آٹھویں رقم

(۳) $9 \frac{19612}{3}$

ایضاً (ج)

(۱) ۱۰۵۰۰۹۹۹ (۲) ۰۵۰۰۷۹۵

(۳) $\frac{1}{4} - \frac{5}{9}$ (۲) $\frac{323}{120} - 1$

(۶) صفر

دوسرا باب (۱) $\frac{1}{u^2-1} + \frac{3}{u^3-1}$ (۲) $\frac{9}{2(u-1)} - \frac{5}{2(u-1)}$

(۳) $\frac{1}{(1+u)^2} - \frac{9+u^4}{(5+u^2+u)^2}$

$$\frac{1 - \sqrt{2} - u}{(1 + u \sqrt{2} - u^2) \sqrt{2}} - \frac{1 - \sqrt{2} + u}{(1 + u \sqrt{2} + u^2) \sqrt{2}} \quad (۴)$$

$$\frac{13}{(3-u) 3} + \frac{4}{(2-u) 3} - \frac{1}{(1+u) 12} \quad (۵)$$

$$\frac{1}{2(u^3+1) 3} - \frac{1}{(u^3+1) 3} + \frac{1}{u 10 - 1} \quad (۶)$$

$$\frac{2+u}{(1+u^2) 5} + \frac{2}{(2-u) 5} + \frac{2}{2(2-u)} \quad (۷)$$

$$\frac{14}{(2+u) 14} + \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u 14} - \frac{1}{2u 8} \quad (۸)$$

$$\frac{3}{2(2+u) 3} + \frac{1}{2(2+u)} +$$

$$(2+u 3) \frac{1}{9} - 1 + u \left(\frac{1}{2} - \right) \frac{2}{9} \quad (۱۰)$$

تیسرا باب (۱) ۴ (۲) ۵۰۴۰ (۳) ۲۰۴۰ (۴) ۳

(۵) ا ب ج + ۲ ف گ ح - ا ف - ب گ - ج ح

(۶) ۲ ا ا ا ج ج ج + ا ا ب ا ب ج + ا ا ب ا ب ج

- ا ج ا ج - ا ج ا ج - ا ج ا ج - ا ج ا ج

$$\frac{311}{2.3} - = 5 \quad \frac{49}{2.3} = 1 \quad \frac{845}{2.3} = 1 \quad (۱۰)$$

$$\frac{1}{31} = 5 \quad \frac{18}{31} = 1 \quad \frac{22}{31} = 1 \quad (۱۱)$$

$$2:3 = 3:4 \quad 4:5 = 5:6 \quad 6:7 = 7:8 \quad (۱۲)$$

$$10:1 = 1:2 \quad 2:3 = 3:4 \quad 4:5 = 5:6 \quad (۱۴)$$

$$\frac{\text{جم } (ن + ۱) ط جب ن ط}{\text{جب ط}} \quad \text{چودھواں باب - ۱ [۱] (۱)}$$

$$\frac{\text{جب } \left(\frac{ن + ۱}{۲} \right) ط جب \frac{ن ط}{۲}}{\text{جب ط}} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{\text{جم } \left\{ \frac{ن - ۱}{۲} + (ن + ۱) ط \right\} جب \frac{ن (ن + ۱) ط}{۲}}{\text{جم } \frac{ن}{۲}} \quad \text{(۱) [۲]}$$

$$\frac{\text{جب } \left\{ \frac{ن - ۱}{۲} + (ن + ۱) ط \right\} جب \frac{ن (ن + ۱) ط}{۲}}{\text{جم } \frac{ن}{۲}} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{\text{جم } (ن + ۱) ط جب ن ط}{۲ جب ط} + \frac{ن}{۲} \quad \text{(۱) [۲]}$$

$$\frac{\text{جم } (ن + ۱) ط جب ن ط}{۲ جب ط} - \frac{ن}{۲} \quad \text{(ب)}$$

$$\frac{\text{مم ط - مم } (ن + ۱) ط}{\text{جب } ۲ ط} \quad \text{ب [۲] (۱)}$$

$$\frac{\text{جم } (ن + ۲) ط جب ن ط}{\text{جب ط}} + \text{ن جم ط} \quad \text{(۲)}$$

$$\frac{\text{ن جب ط} + \text{جب } (ن + ۲) ط جب ن ط}{\text{جب ط}} \quad \text{(۳)}$$

$$\frac{\text{ن جب } \frac{۱ + ن^۲}{۲} ط جب \frac{ط}{۲} - ۱}{(۱ - جم ط)^۲} \quad \text{ج (۱)}$$

$$\frac{\text{ن جم } \frac{۱ + ن^۲}{۲} ط}{\text{جب } \frac{ط}{۲}} \quad \text{(۲)}$$

$$\frac{\{ \text{جم } n + 1 + n \} - (3)}{(1 + \text{جم } n)^2} \quad (3)$$

$$\frac{n \text{ جب } \frac{1+n^2}{2}}{\text{جم } \frac{n}{2}} \quad (3) \quad (1-)$$

فہرست اصطلاحات

نصاب ریاضی (حصہ اول)

انگریزی	اردو	انگریزی	اردو
Co-axial	ہم محور	A	
Coefficient	سہ	Annuity	سالیانہ
Complex	ملتی	Arithmetic mean	} حسابی اوسط
Conic	مخروطی	(A. M.)	
Conic section	تراش مخروط	Asymptote	متقارب
Conjugate	مزدوج	Axis	محور
Consistent	باثبات	B	
Corollary	نتیجہ صریح	Binomial theorem	مسئلہ ثنائی
Cosecant	قاطع التمام	Bromwich	برام وچ
Cosine	جیب التمام	C	
Cotangent	ماس التمام	Cardan	کارڈان
Cotes	کوٹیز	Cartesian	کارٹیس
Critical	فاصل	Cauchy	کوشی
Cubic	کعبی	Chord	وتر
Curve	منحنی	Circumference	محیط
Cyclic	دوری - دائری	Clausius	کلاؤسیوس

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Focus	ماسک	D	
G		D'Alembert	ڈالامبر
General equation	عام مساوات	DeMoivre	ڈی موآور
Geometric mean {	ہندسی اوسط {	Denominator	نسب نما
(G.M.)		Determinant	مقطعہ
H		Dimensions	ابعاد
Harmonic mean		Director circle	مرتب دائرہ
(H.M.)	موسیقی اوسط {	Directrix	مرتب
Hobson	مالسن	E	
Horner	ہورنر	Eccentricity	خروج المرکز
Hyperbola	قطع زائد - زائد	Elements	اجزائے ترکیبی
Hyperbolic function	زائدی تفاعل {	Eliminant	مسقط - حاصل اسقاط
I		Elimination	اسقاط
Imaginary	خیالی	Ellipse	قطع ناقص - ناقص
Index	قوت نما	Equimultiples	اضعاف متساویہ
Infinity	لاتناہی	Euler	آئیلر
Intercept	مقطوعہ	Even	جفت
L		Expansion	پھیلاؤ
Latus rectum	وتر خاص	Exponential theorem	مسئلہ قوت نما {
Limit	ہمایت - ہما	F	
Locus	طریق	Factorial	ضربی
M			

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Q		Major axis	اعظم محور - محورِ اکبر
Quotient	خارج قسمت	Mantissa	اعشاریہ نوکارتی
R		Minor axis	اقل محور - محورِ اصغر
Radical axis	بنیادی محور	Modulus	مقیاس
Radius vector	نیم قطر سمتی	N	
Real	حقیقی	Normal	عماد - معین
Rectangular hyperbola	قائم زائد	Numerator	شمار کنندہ
Rhombus	معین	Numerical	عددی
S		O	
Sarrus	سارس	Odd	طاق
Secant	قاطع	Order	رتبہ
Series	سلسلہ	Origin	مبدأ
Sine	جیب	P	
Suffix	علامت زیرین - لاحقہ	Parabola	خطِ مکانی - مکانی
System of circles	دائروں کا نظام	Parallelogram	متوازی الاضلاع
T		Partial fraction	جزوی کسر
Tangent	ماس	Perpendicular	عمود
Trigonometrical	مثلثی	Polar	قطبی
U		Polar co-ordinate	قطبی مختار
Unity	ایکانی	Pole	قطب
Unknown	نامعلوم - مجهول	Polynomial	کثیر رقی
		Projection	نقل

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
X-axis	محور X	Vector Value	ستہی قیمت
Y		V	
Y-axis	محور Y	W	
Z		Whole number	صحیح عدد
Zero	صفر	X	

اغلاط نا

نصاب ریاضی

(برائے طبیعیات بی۔ اے)

صحیح	غلط	نمبر	نمبر	صحیح	غلط	نمبر	نمبر
س س	س س	۱۳	۲۰	ن	ن	۱	۳
دو تین	دو تین	۱۸	"	ن ج	ن ج	۹	۵
ن + (ن)	ن + (ن)	۶	۲۱	$+\left(\frac{۳۹}{۳۲}\right)$	$+\left(\frac{۳۹}{۳۲}\right)$	۹۱۳	۱۶۱۵
پ ۱	پ ۱	۱۴	۲۱	$\frac{۲۱}{۸}$	$\frac{۲۱}{۸}$	۱۶	۱۵
پ ۲	پ ۲	۱۶	۲۱	$\left(۲ - \frac{۷}{۲}\right)$	$\left(۲ - \frac{۷}{۲}\right)$	۸	۱۶
پ	پ	۱۷	"	$\frac{۱۰۰۳۷}{۱۰۰۳۷}$	$\frac{۱۰۰۳۷}{۱۰۰۳۷}$	۱۵	"
(۲ + ر)	(۲ + ر)	۵	۲۲	$\frac{۲}{۲} \left(\frac{۱}{۲} \right)$	$\frac{۲}{۲} \left(\frac{۱}{۲} \right)$	۳	۱۷
$\frac{۱}{۲} (۱ -)$	$\frac{۱}{۲} (۱ +)$	"	"	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۸	۱۷
۳ + (۲ + ر)	۳ + (۲ + ر)	۶	۲۲	ن - ر + ۱	ن - ر + ۱	۱۷	۱۷
ض	ض	۲۵	۲۳	۳ لا	۳ لا	۶	۲۰
+ د لا +	+ د لا +	۱۸	۲۴	+ ۳ لا +	+ ۳ لا +	۷	"
ض	ض	۲۵	۲۵	ج لا	ج لا	۸	"
+ ۳ لا	+ ۳ لا	۹	"	+ ۳ لا +	+ ۳ لا +	۱۰	"

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
ج _۳	(ج _۲)	۱۰	۲۷	(۳+۶) لا	(۲+۶) لا	۱۵	۲۵
-۳۶+	-۲۶+	۱۹	۲۹	ضد	ضد	۲۰۱ ۸۰۵ ۱۰۰۹	۲۶
+ کن ۲ لام +	+ کن ۲ لام +	۷	۵۱	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۱۲	۲۶
لام	لام	۱۰	"	اس کے	اس کے	۳	۲۸
ل _۱ ل _۲ ل _۳	ل _۱ ل _۲ ل _۳	۲۰۱۷	"	یعنی	یعنی	۴	"
+ ل _۱ ب ب _۲	+ ل _۱ ب ب _۲	۲۰	"	استعمال	استعمال	۶	"
ب _۱ ب _۲ ب _۳	ب _۱ ب _۲ ب _۳	۷۱	"	جزوی	جزوی	۷	"
ج _۱ ج _۲	ج _۱ ج _۲	"	"	اجزائے ضربی	اجزائے ضربی	۱۷	"
(ب _۱ - ج _۱)	(ب _۱ - ج _۱)	۱	۵۲	اور میں	اور میں	۲۲	"
(ب _۱ - ج _۱) (ب _۲ - ج _۲)	(ب _۱ - ج _۱) (ب _۲ - ج _۲)	۹	"	کو	کو	۱۳	۲۹
ج _۱ = ج _۲	ج _۱ = ج _۲	۱۶	"	(ا-ب)	(ا-ب)	۱۴	"
- ب _۱ - ج _۱	- ب _۱ - ج _۱	۱۰	۵۳	قیمتیں تعین	قیمتیں تعین	۱۶	"
ب _۱ ج _۱	ب _۱ ج _۱	۱۲	"	تفاعل	تفاعل	۱	۳۰
زائد	زائد	۲۱	۵۳	(۳+۱) ۲	(۳+۱) ۲	۶	۳۲
ل _۱	ل _۱	۵	۵۴	$\frac{ن}{۵۰۰}$	$\frac{ن}{۵۰۰}$	۸	"
ب _۱ ب _۲ ب _۳	ب _۱ ب _۲ ب _۳	۶	"	(۵+۱) ب	(۵+۱) ب	۱۶	"
ب _۱ ب _۲ ب _۳	ب _۱ ب _۲ ب _۳	"	"	- ۲ خ	- ۲ ح	۴	۳۴
مساوی اضلاع	مساوی اضلاع	۱۳	"	لا-۴ لا	لا-۴ لا	۸	۳۶
۴ ۱ ۷	۴ ۱ ۷	۲۲	۵۷	کسر = $\frac{۲}{۳}$ لا	کسر = $\frac{۲}{۳}$ لا	۱۰	"
ب _۱ ل _۱ ب _۲	ب _۱ ل _۱ ب _۲	۴	۵۹	مثال (۲)	مثال (۲)	۱۱	"
ل _۱ ب _۱ ج _۱ ب _۲	ل _۱ ب _۱ ج _۱ ب _۲	۱۱	"	صعودی	صعودی	۹	۳۷
سابق	سابق	۲۱	۶۰	(۱-)	(۱-)	۱۸	۴۰
+ و +	+ و +	۲۳	"	ب _۱ = ۰	ب _۱ = ۰	۵	۴۷

صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط
جس	حس	۲۲	۱۳۲	۰ = ۳ - لام	۰ = ۳ - لام	۱	۶۲
مساوات	ساوات	۱	۱۳۳	۱۱	۱۱ -	۲	۶۴
عہ	عہ	نقل	"	۰ = ۳ - لام	۰ = ۳ - لام	۳	"
لا جم ط	لا جم ط	۴	۱۳۹	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۲	۶۹
نقطہ	فقطہ	۲۰	۱۳۰	ن (ن - ۱)	ن (ن - ۱)	۱۶	۷۰
لا عم	لا عم	۱۸	۱۴۹	عدداً	حدداً	۱۰	۷۴
+ ۲ گ لا	+ ۲ گ لا	۱۲	۱۶۱	(۱ -) +	(۱ -) +	۱۳	"
(۴ ماج ۰)	(۴ ماج ۰)	۱۹	۱۶۲	+ (۲ + ۱)	+ (۲ + ۱)	۲	۷۵
گرتا ہے	گرتا ہے	۲۴	۱۶۴	محسوب	محسوب	۱۹	"
تغیر	تغیر	۱۶	۱۷۱	$\frac{۱}{۲۹}$	$\frac{۱}{۲۹}$	۱۷	۷۶
جاسکتی	جاسکتی	۲۱	۱۷۴	$\frac{۱}{۳(۱-۲)}$	$\frac{۱}{۳(۱-۲)}$	۲۰	"
یہ اے	یہ اے	۲	۱۷۷	رقمون	رقمون	۱۱	۷۷
مکانی	مکانی	$\frac{۱۴}{۸}$	$\frac{۱۸۳}{۱۸۹}$	۳۳۰۰۳	۳۳۰۰۳	۱۶	۷۸
مہم	مہم	۱۴	۱۸۶	(-)	(-)	۷	۸۶
= مراج ۲	= مراج ۲	۱۷	۱۹۱	ج = ۰	ج = ۱	۱۰	۸۸
یعنی لا (لا - لام)	یعنی لا (لا - لام)	۱۲	۱۹۲	(جم + مخ جب)	(جم + مخ جب)	۱۵	"
یہ	یہ	۶	۱۹۴	۲ - جب ط	۲ - جب ط	۱۴	۹۱
۱ - ۱	۱ - ۱	۲۱	۱۹۴	۲ - جب ط =	۲ - جب ط =	۲۰	۹۶
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$			ن (۱ - ۲)	ن (۱ - ۲)	۱۴	۱۰۴
منطبق	منطبق	۱۸	۱۹۶	ضعف	ضعف	۱۴	۱۰۸
فہم	فہم	۱۷	۱۹۹	لا	لا	۷	۱۲۹
لا لا	لا لا	۶	۲۰۱	+ ۲ ج + ۱	+ ۲ ج + ۱	۲۱	"
۱ =	۱ =	۸	"	گ -	(مک -)	۱۹	۱۳۲

غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح	غلط	صحیح
خط	خطہ	۱	۲۳۱	ق	ق	شکل	۲۰۶
ب ج =	ب ج =	۱۸	۲۳۴	ب	ب	شکل ۲۶	۲۱۰
بقدر م	بقدر م	۲۲	۲۵۹	$\frac{ب}{ا}$	$\frac{ب}{ا}$	۲	۲۱۲
یعنے لا	یعنے لا	۸	۲۶۰	ج ف سے	ج ف سے	۱	۲۱۵
سے	سے	۲	۲۶۱	ساوات (۴) سے	ساوات (۴) سے	۲۲	۲۱۸
(۴ -)	(۴)	۸	۲۶۲	مستنبط	مستنبط	۱۷	۲۲۲
۶۳۹۳۳۰۰۰	۶۲۹۳۳۰۰۰	۱۹	۲۶۵	$\frac{ا}{لا}$	$\frac{ا}{لا}$	۹	۲۲۵
۶۹۳۹۶	۶۹۲۹۶	۲۹	"	بمجاظ	بمجاظ	۱۹	۲۲۵
غلط ۶۸۱۷۱۸۷۵۴۳۰۰۰		۳۷	"	را	را	۵	۲۲۹
صحیح ۶۸۲۷۱۸۷۵۴۳۰۰۰				$\frac{ا}{را}$	$\frac{ا}{را}$	۱۲	۲۳۰
$\frac{۱}{۲} + ۱$	$\frac{۱}{۳} + ۱$	۱۷	۲۸۰	پہنچتی	پہنچتی	۸	۲۳۳
جزر (لا + ۱) +	جزر (لا + ۱) +	۲	۲۸۶	ج ف آ	ج ف آ	۱۵	۲۳۵

۵۱
ج - ۱
آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار
لیا گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ جرمانہ لیا جائیگا۔

۱۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۲۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۳۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۴۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۵۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۶۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۷۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۸۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۹۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔
 ۱۰۔ اگر کسی نے عبادتِ خدا کو چھوڑ دیا تو اس کا جہنم کا مکان بن گیا۔

